HÅKAN LENNERSTAD & LARS LUNDBERG

En annan addition
och Stern-Brocots träd

När två bråk adderas så adderar man bråkens täljare för sig och nämnare för sig. Så får man väl inte göra? Jodå, det får man, men inte med vanlig addition. Här får vi en glimt av vad följderna blir av denna annorlunda addition.

Nämnarens förra nummer innehöll bland annat DLP 29, där Lars Mouwitz tar upp en ”addition”:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$$

Den vänstra likheten liknar hädelse mot matematiken, där står ju att $17/12 = 5/7$. Kan man hålla med om det? Nja, men låt oss inte hänga upp oss på småsaker som rätt och fel!

Mouwitz nämner ett par tillämpningar för denna addition. Antag att man har en skål med 2 röda kulor och 3 svarta, och en annan skål med 3 röda och 4 svarta. Om de båda blandas är förhållandet 5/7. Om man först kör bil 270 km på 3 timmar, och sedan 150 km på två timmar, så är medelhastigheten $(270 + 150)/(3 + 2)$ km/tim. Jag kan bidra med en till. Om vi har a kg gas i en behållare vars volym är b liter, och c kg gas i en annan närbelägen behållare som är d liter stor, så är tätheterna a/b och c/d. Om vi tar bort en mellanvägg mellan de två behållarna så att gaserna blandas, så får vi en gas vars täthet är $(a+b)/(c+d)$.

Låt oss emellertid undvika hädelser mot matematikens allra heligaste – sanningen – genom att skriva denna ”addition” med ett annat plustecken, till exempel tecknet $\oplus$. Det används gärna i matematiken när det dyker upp någon ny additionsliknande operation. Vi kan då skriva

$$\frac{2}{3} \oplus \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$$

och risken att brännas på bål går mot noll.

Som exemplen ovan antyder kan operationen vara användbar i en situation där man slår ihop två liknande situationer till en enda, och ställer samma medelvärdesfråga om den större. Den kan upprepas till tre gånger: $a/b \oplus c/d \oplus e/f$ (tre skålar med kulor, tre körsträckor, tre gasbehållare), eller fler.

En annan tillämpning är vektoraddition: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Vektoradditionen fungerar på samma sätt som $\oplus$ vilket betyder att mycket av vad vi vet om den ena kan överföras till den andra. För en vektor (a, b) är kvoten a/b också viktig, den anger vektorns riktning. Vektoradditionen kan även generaliseras till tre eller flera dimensioner – tre eller flera tal på en gång. En kvot har ju bara två tal.

Men tillbaka till $\oplus$. Talet $(a + b)/(c + d)$, som vi nu kan skriva $a/b \oplus c/d$, kallas *medianten* av a/b och c/d. Så vi kan kalla $\oplus$ för *mediantaddition*. Om a/b och c/d är olika bråk, säg $a/b < c/d$, så kommer medianten att ligga någonstans mellan dessa bråk, dvs $a/b < (a + b)/(c + d) < c/d$. Eller, med tecknet $\oplus$, $a/b < a/b \oplus c/d < c/d$.

Det finns ett underbart träd baserat på denna operation, som konstruerades på 1800-talet. Moritz Abraham Brocot efterträdde Carl Friedrich Gauss i Göttingen, och publicerade 1858 trädet i *Über eine zahlentheoretische Funktion* [5]. Två år senare beskrev klockmakaren Achille Stern oberoende av Brocot samma träd i en rapport om hur kugghjul kan arrangeras effektivt [1]. Trädet fick därigenom namnet *Stern-Brocots träd*.

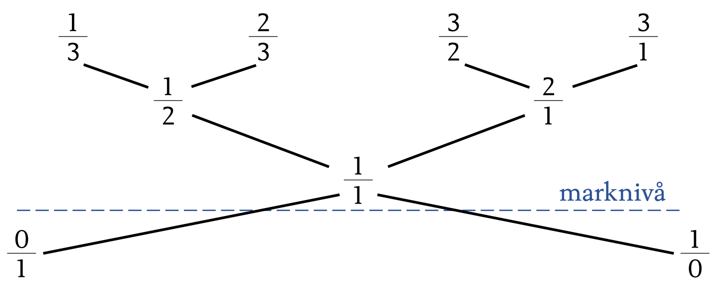
Huvudreferens för trädet är idag *Concrete Mathematics* av Donald Knuth, Ron Graham och Oren Patashnik [2]. Ingen matematikbok är skriven med en sådan medryckande men saklig gnista, som denna, rakt igenom! Den är ett matematiklitterärt underverk på doktorandnivå.

Stern-Brocots träd startar med två speciella tal, som har kallats noll och oändligheten maximalt förkortade, nämligen de två ”bråken” 0/1 och 1/0 (flammorna dånar i bakgrunden). Man kan säga att dessa två tal är trädets två rötter.

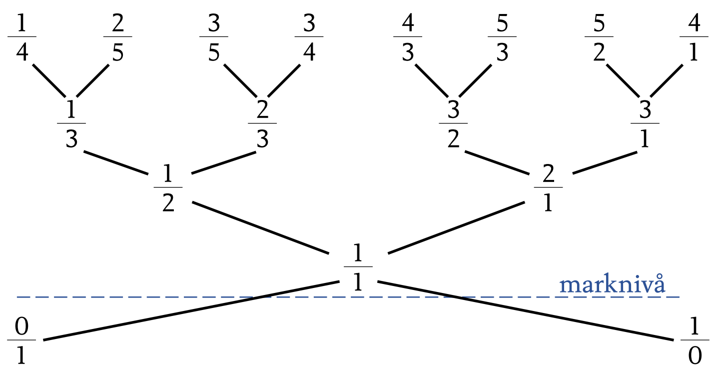
Tillämpar vi mediant-operationen på dem är vi återigen på fast mark, för det ger (0 + 1)/(1 + 0) = 1/1. Vi skriver 1/1 och inte 1, för vi är här intresserade av bråk – rationella tal. Talet 1/1 är trädets stam vid marknivå. Medianten befinner sig i storleksordning mellan de två ”talen” 0/1 och 1/0, så vad är naturligare än att sätta ”talen” i ordning: 0/1, 1/1, 1/0?

Om vi fortsätter att tillsätta medianter i mellanrummen, så får vi 0/1, 1/2, 1/1, 2/1, 1/0. För 0/1 ⊕ 1/1 = 1/2 och 1/1 ⊕ 1/0 = 2/1. Nu har vi kommit upp till de två huvudgrenarna 1/2 och 2/1. Nästa gång vi lägger till medianter i alla mellanrum får vi talen 0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1, 3/2, 2/1, 3/1, 1/0. Det kan vi se som att de två grenarna 1/2 och 2/1 har delat upp sig i vardera två grenar.

Notera att talen i följden hela tiden är i växande ordning i horisontell riktning. Vi kan skriva upp det vi har som ett träd, till exempel på följande sätt:



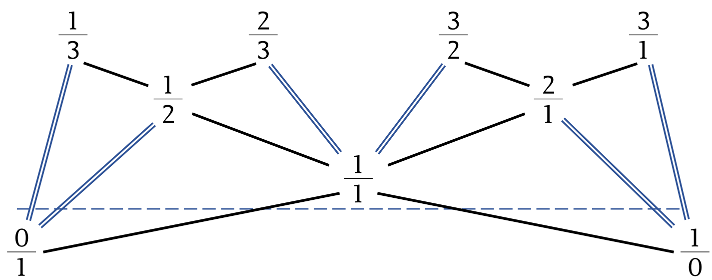
Detta är början på Stern-Brocots träd. Man kan fortsätta på samma sätt. Vi läser alltså av trädet horisontellt, och medianten av två horisontella grannar bildar ett nytt löv högst upp i trädet. Det betyder att varje gren delar sig på nytt i två grenar genom mediantoperationen. Trädets följande löv är 1/4 från 0/1 och 1/3, 2/5 från 1/3 och 1/2, och ytterligare sex mediantoperationer på horisontellt angränsande tal ger 3/5, 3/4, 4/3, 5/3, 5/2, och 4/1. Sätter vi in dem också i trädet får vi nedanstående bild:



Antalet noder på en viss nivå i trädet är 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Om man bortser från de två rötterna 0/1 och 1/0 är trädet ett så kallat binärt träd. ”Markninvån” skiljer ut 0/1 och 1/0 – efter dessa börjar regelbundenheterna på allvar. Det fantastiska med detta träd är att man kan bevisa att varje positivt rationellt tal uppträder exakt en gång i detta träd! Och de uppträder alltid maximalt förkortade. Inte ett enda bråk dyker upp som kan förkortas.

Stern-Brocots träd går att finna på många webbplatser, dock uppochnervänt, och utan att 0/1 och 1/0 beskrivs som rötter.

Trädet brukar som sagt skrivas som ett binärt träd. Men det är inte något binärt träd. Om du tycker det är något skumt med figuren, så har du rätt. Inte alla mediantoperationer är representerade. Till exempel 3/2 är ju 1/1 $\oplus$ 2/1 – varför är förbindelsen till 1/1 inte representerad? Det är ett binärt träd bara om man systematiskt ignorerar den ena typen av förbindelse. Om man tar med alla förbindelser får vi följande utseende:



Det blir lite rörigare, men riktigare. Som binärt träd ser det ut som varje nod har två barn. I själva verket har varje nod oändligt antal barn. Däremot har varje ”barn” två ”föräldrar”. Detta är den vanliga terminologin för grafer, som t.ex. släktträd. Terminologin blir lite kuslig här, för i detta träd har den ena föräldern till ett barn alltid ett annat barn tillsammans med detta barn... Nå, det är bara ord!

Man kan beskriva tal entydigt med vandringar i detta träd, från noden 1/1, Nu bortser vi igen från distansrelationerna. Notation: V = Vänster och H = Höger. Då är V = 1/2, H = 2/1, VV = 1/3, VH = 2/3 (först vänster sen höger), HV = 3/2, osv. På nästa nivå är VHV = 3/5, osv. I VH-systemet har varje rationellt tal en ändlig representation, eftersom varje rationellt tal dyker upp förr eller senare.

Så bra är det inte i decimalsystemet. Här finns det många rationella tal som kräver en oändlig representation, det enklaste exemplet är väl 1/3 = 0,333333... I decimalsystemet har vi oändlig utveckling så fort nämnaren innehåller någon primtalsfaktor som inte är 2 eller 5. På motsvarande sätt i basen 6, till exempel, har 1/2, 1/3 och 1/12 ändlig utveckling, men inte 1/5 eller 1/21. Stern-Brocot-utvecklingen beror inte alls på vilken bas man använder. Alla rationella tal har ändlig utveckling.

Däremot finns det irrationella tal som är periodiska! Vadå? Det finns inga irrationella tal med! Nej, men varje irrationellt tal, som t ex ϖ, kan med trädet uppskattas av en följd rationella tal, som ger bättre och bättre approximation. I denna tanke ligger ju själva den matematiska definitionen av reella tal.

Men irrationella tal kan väl inte ha periodisk utveckling? (En ny hädelse? Bålet flammar upp.) Decimalutveckling – nej, Stern-Brocot-utveckling – ja. Den följd av bråk där nämnare och täljare växer snabbast i trädet ges av Fibonacciserien. Det är 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5,..., F_{n+1}/F_n,..., alternativt dess inverterade värden på andra sidan av trädet. Denna konvergerar mot gyllene snittet $(\sqrt{5}+1)/2$, som i Stern-Brocotutvecklingen är HVHVHVH... Här har vi en periodisk Stern-Brocotutveckling för ett irrationellt tal – dessutom ett mycket berömt sådant.

Det hela är relaterat till kedjebråk. Säg att $H^aV^bH^cV^d$ är ett tal där man först går *a* steg till höger, sedan *b* steg år vänster, osv.

Man kan visa att det bråk som svarar mot sekvensen $H^aV^bH^cV^d$ är talet $a + 1/(b + 1/(c + 1/(d + 1)))$. Sådana upprepade divisioner kallas kedjebråk. Mycket riktigt gäller då att $(\sqrt{5}+1)/2 = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + ...)$.

Man kan rita trädet på ett något annorlunda sätt så att höjden för en nod a/b är $a+b$. Antalet noder på en viss höjd är då $\varphi(a+b)$, dvs den ges av Eulers $\varphi(n)$-funktion. Denna funktion anger antalet tal mellan 1 och n som saknar gemensamma faktorer med n. Så vi har till exempel $\varphi(n)=n-1$ om n är ett primtal. De k där $(a+b-k)/k$ är maximalt förkortat, alltså där $a+b-k$ och k saknar gemensamma faktorer, är just de som förekommer i trädet på nivå $a+b$. Ett sådant träd finns på matematik.lennerstad.se.

Summa summarum: mediantadditionen $\oplus$ är en mindre känd släkting till den vanliga additionen +, som har egna regler och egna användningar. Matematiken tillåter utvecklande av ständigt nya distinktioner, som tillåter det gamla att förbli 100 % oförändrat, relevant och sant. Det är en remarkabel egenskap hos matematiken att det nya inte ger intrycket av att underminera det gamlas sanningshalt, som ju är fallet i många andra sammanhang. (Nu grillas det sojakorv på bålet.)

Avslutningsvis något om referenserna. Boken [2] är redan recenserad. I [3] används Stern-Brocots träd till att uppskatta rationella tal med andra rationella tal som har mindre nämnare. En högst naturlig fråga som behandlas här är: vad är den minsta oundvikliga orättvisan (betecknad $[{}^{a}{}_{b}]_{c}$) om a objekt ska delas mellan b personer som delas i c grupper?

Ett thrillerartat exempel: En grupp av 7 dykare har stannat på ett stort djup lite längre än de tänkt sig. De har 12 syrgastuber och 3 ubåtar. I ubåtarna är syret redan förbrukat. Vad är den jämnaste uppdelningen av dykare och gastuber på de tre ubåtarna, för att alla ska klara sig när de går upp till ytan? Om det var en enda ubåt skulle var och en få 12/7 tuber syrgas. Ett tips för lösning är att fortsätta rita Stern-Brocots träd till 12/7 dyker upp, och sedan titta på föregångarna till 12/7. Svaret är 5/3, 5/3, 2/1, som gör att 1/3 (största minus minsta) är minsta möjliga orättvisa (detta skriver vi $[{}^{12}{}_{7}]_{3} = 1/3$). Det kan finnas andra lösningar som är lika bra, men ingen bättre. Vi antar att a, b och c är heltal, eftersom man varken kan dela en person, ubåt eller gastub innan uppstigning. I dessa ”utvidgade bråk” utvidgas förkortning även till indexet: $[{}^{da}{}_{db}]_{dc} = [{}^{a}{}_{b}]_{c}$.

Det visade sig att problemet i [3] var centralt för att lösa ett fundamentalt datavetenskapligt problem. Här jämförs i värsta fallet två alternativ att exekvera parallella program på en parallelldator, där man har mer frihet i det ena alternativet än i det andra [4]. Utan parallelldatorproblemet hade [3] inte kommit till.

[1] och [5] är historiska publiceringar, där Stern-Brocots träd föddes. Sammanhangen var här talteori respektive kugghjul. Matematik och tillämpning gick hand i hand redan från början.

LITTERATUR

[1] Brocot, A. *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode*, Revue Chronométrique 6 (1860), 186-194.

[2] Graham, R., Knuth, D. & Patashnik, O., *Concrete Mathematics*, Addison Wesley ISBN 0-201-14236-8 (1991).

[3] Lennerstad, H., Lundberg, L., *Generalizations of the floor and ceiling functions*, Research Report No. 2006:02, Blekinge Tekniska Högskola, www.bth.se/fou.

[4] Lundberg. L, Lennerstad, H., *The maximum gain of increasing the number of preemptions in multiprocessor scheduling*, Research Report , Blekinge Tekniska Högskola, (2006).

[5] Stern M. A., *Über eine zahlentheoretische Funktion*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 55 (1858), 193-220.