Chanser i sport och Pascals summatriangel

Håkan Lennerstad,
professor emeritus i matematik vid Blekinge Tekniska Högskola

Med lite matematik kan man förstå en hel del om olika sporter.
Man kan också kontrollera hur vettiga olika spel på sportresultat är.
Det visar sig att i flera sporter gömmer sig en triangel av heltal, som är nära besläktad med Pascals triangel. Låt oss kalla den Pascals summatriangel.
Denna artikel handlar inte om tennis, men är en fortsättning på "En tennisgåta" av samma författare från Nämnaren nr 4, 2019. Det mesta i denna artikel kan undersökas av elever i grundskolans senare del och gymnasieskolan.

Skillnader mellan sporter

Poängräkning och utkorandet av en vinnare sker på helt olika sätt i olika sporter.
I fotboll, handboll och ishockey vinner det lag som gör flest mål, och man spelar en begränsad tid. Ingen vet i förväg hur många mål det blir.
I konståkning och simhopp får man poäng av domare efter utförd tidsbegränsad prestation.
I skidåkning, simning, löpning och många sporter ska man fullfölja något på så kort tid som möjligt.

Men i många andra sporter vinner den som vunnit ett givet antal bollar. När det skett är en match slut. I dessa sporter finns ingen tidsbegränsning. Enskilda bollar kan ta mycket lång tid.
Exempel på sådana sporter är bordtennis och squash. Här vinner man ett set när man har 11 poäng. I tennis krävs 4 poäng (15, 30, 40 och en till) för att vinna ett gem. I badminton är det först till 21 bollar som vinner ett set. I alla dessa fyra racketsporter måste man vinna ett set med minst två poäng. Vid 11-10 i bordtennis är setet inte slut.
Det måste inte vara bollar som ska vinnas. I snooker (en form av biljard) består en match av att vinna t.ex. 10 bord, eller "frames" som man säger på engelska. Den som först har vunnit 10 frames (till exempel) är vinnare. Här behöver inte differensen till motståndaren vara minst 2. När det står 9-9 börjar matchens absolut sista "frame".

Att räkna baklänges

För att undersöka detta tänker jag räkna baklänges. Låt oss tänka oss att A och B spelar – vi tittar på matchen A-B. Jag tänker räkna antalet bollar *som är kvar till vins*t.
Så om det står 1-2 så menas med det att A vinner setet om A vinner en boll till, men B behöver vinna 2 bollar. Siffrorna anger hur många bollar man saknar, som man behöver vinna ytterligare. Om det i snooker står 9-9 och man går till 10, så är det 1-1 med denna baklängesnotation. Båda spelarna behöver bara ett frame till.

Med den notationen spelar det ingen roll vilket antal man behöver för att vinna. Inte heller vilken sport det handlar om. Det är också betydligt lättare att räkna.
Låt oss hålla oss till snookerfallet till att börja med, som är något enklare. Vi använder ett enkelt grundantagande, baserat på att A och B är jämna spelare/lag, och att vi inte vet något

om psykologi eller speciella förhållanden. Då är det naturligt att anta att **vid varje boll/frame är det 50% chans att A vinner, och följaktligen 50% chans att B vinner den/det**.

Så när det står 1-1 är då sannolikheten ½ att vinna för både A och B.
När det står 1-2 är då sannolikheten ¾ att A vinner, och ¼ att B vinner. En motivering för det är att om A vinner nästa boll så har A vunnit – då är sannolikheten 1 att A vinner. Om A förlorar är det 1-1 och A har 50% chans till. Vi får då sannolikheten

$1\cdot0.5 + 0.5\cdot0.5 = 0.75$.

Vad vi gjorde här är en allmän princip. När det står m-n (ex: 5-3) är de två följande möjligheterna (m-1)-n och m-(n-1) (ex: 4-3 och 5-2). Inget annat kan hända. Båda har sannolikhet 0.5. Vi kan beräkna sannolikheten p(m,n) att A vinner när det står m-n från dessa två fall:

$p(m,n) = p(m-1,n)\cdot0.5 + p(m,n-1)\cdot0.5$.

Detta samband

$p(m.n) = (p(m-1,n) + p(m,n-1))/2$

är ju väldigt likt Pascals triangel, där man ska addera de två talen ovanför! Enda skillnaden är att man i vårt fall ska dela med 2 också (bilda ett medelvärde). På nästa rad får man alltid en faktor 2 till i nämnaren.
Men låt oss skippa dessa halvor och fjärdedelar ett tag, vi tar med dem senare. Från 1/2, ¾ och ¼ som vi har hittills får vi då 1 i toppen, och därefter 3 och 1 i nästa rad.
Pascals triangel kan man få genom att starta med en serie med bara nollor och en etta, och sedan lägga till summorna i mellanrummen:

```
0 0 0 0 1 0 0 0 0
```

ger

```
0 0 0 0 1 0 0 0 0
 0 0 0 1 1 0 0 0
```

och i nästa steg

```
0 0 0 0 1 0 0 0 0
 0 0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 1 2 1 0 0 0
```

Och nästa

```
0 0 0 0 1 0 0 0 0
 0 0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 1 2 1 0 0 0
 0 0 1 3 3 1 0 0.
```

Tar man bort nollorna har vi Pascals berömda triangel, som innehåller alla binomialtal (även kallade lite otympligt ”binomialkoefficienter”). Andra raden i Pascals triangel är 1 1, men vi i vårt nya fall fick vi ju 3 1.
Så vår tävlingssituation beskrivs inte av Pascals triangel. Ändå är det samma summaregel som gäller: addera de två ovanstående. Hur kan det då bli annorlunda? Jo, skillnaden är startvärdena. I vårt fall ska vi faktiskt starta med en serie av många ettor, följt av bara nollor! Det är skillnaden! Inte bara en etta, som för Pascals triangel.
Låt oss testa det. Summera på samma sätt, men starta med 1 1 1 1 1 0 0 0 0 i stället. Det ger

1 1 1 1 1 0 0 0 0
2 2 2 2 1 0 0 0
4 4 4 4 3 1 0 0 0
8 8 8 7 4 1 0 0

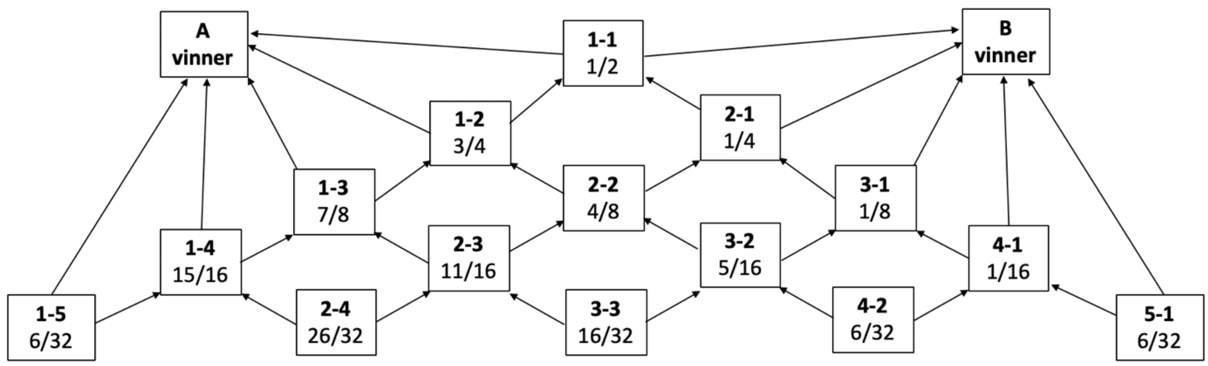
Tredje raden här är i alla fall rätt med vad vi fått tidigare: 3 och 1! Om detta stämmer får vi från denna tabell att sannolikheterna att A vinner vid 1-3 är 7/8, vid 2-2 är 4/8 och 3-1 är 1/8. Här tog jag med halvorna igen, eftersom vi gick över till sannolikheter.

Det är mycket lätt att fortsätta triangeln på Pascals sätt – genom att summera de två ovanstående:

1 0
2 1 0
4 3 1 0
8 7 4 1 0
16 15 11 5 1 0
32 31 26 16 6 1 0

Denna triangel av heltal kallar jag Pascals summatriangel. Därför den består av summor från Pascals triangel, som vi strax ska se. Jag tänker mig här konventionen att fortsättningen på en rad till höger respektive till vänster får man genom att kopiera det sista elementet hur många gånger som man behöver.

Talen i triangelns vänsterkant anger även nämnaren vi ska dividera med för att få sannolikheterna. Vi kan illustrera situationen med en graf, som anger poängställning och sannolikhet i varje ruta. Pilarna anger till vilka två rutor en boll kan leda till.



Men hur vet vi att allt detta kommer från raden 1 1 1 1 0 0 0 0?
Jo, vi kan gå baklänges.
Vi räknade ju ut toppen, som var ½ och sedan ¾ och ¼. Som gav oss 1 och efter det 3 och 1.
Låt oss lägga till nollor till höger, så kan man fråga sig vad x, y och z nedan bör vara om vi följer samma regel att summera de två övre talen.

x y 0
 z 1 0
  3 1 0

Vi får y + 0 = 1 med den vanliga regeln, så y=1.
Vi får också z + 1 =3, så z = 2.
Härnäst får vi x + 1 = 2, som ger x = 1.
Vi kan fortsätta på detta sätt, eftersom sannolikheten att A vinner vid 1-3 är 7/8, vid 1-4 är 15/16, osv. Genom att fortsätta så kan man nysta upp raden 1 1 1 1 0 0 0 0 överst.

Pascals triangel och Pascals summatriangel

Men hur är talen i denna triangel relaterade till binomialtalen?
Det är ett enkelt samband. Svaret är att var och ett av dem är summan av binomialtal. Man kan konstruera denna triangel direkt från Pascals triangel genom att ersätta ett tal på en viss plats med summan av talet och alla andra tal på samma rad till höger om det.
Rad tre i Pascals triangel är 1 2 1 och ger då 4 3 1.
Rad fyra är 1 3 3 1 och ger 8 7 4 1.

Om vi nu tar med halvor och fjärdedelar också, så ger detta en formel för sannolikheten för A att vinna vid ställningen m-n:

$$p(m,n) = 2^{1-m-n} \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k}.$$

Men hur kan vi bevisa att vi får summor av binomialtal? Det kan göras formellt med induktionsbevis, men jag tänker använda ett mer geometriskt sätt. Ett värde i Pascals triangel talar nämligen om något konkret geometriskt om triangeln. Värdet på en viss plats är faktiskt antalet olika vägar som finns från 1:an i toppen av triangeln till den platsen! Det måste vara kortaste väg: det handlar om hur många kortaste vägar det finns, räknat i antal steg.
Till varje 1:a på kanten finns bara en väg. Mycket riktigt.
Till varje värde i en rad intill ettorna, till exempel till en 4:a, kan man svänga in till den raden på 4 olika ställen. Det ger 4 vägar.
Från talet 6 finns det exakt 6 olika vägar till topp-1:an som använder ett minimalt antal steg.
Låt oss visa detta generellt. I detta resonemang behöver vi att exempelvis $\binom{2}{3} = 0$. Nämligen att $\binom{n}{k} = 0$ om $k < 0$ eller $k > n$. Definitionen av binomialtal är ju hur många sätt man kan välja en grupp av k personer om det finns n personer att välja på. Och de finns exakt 0 sätt att välja tre personer ur en grupp av två.
Låt oss iterera sambandet

$$\binom{n}{k} = 1\binom{n-1}{k-1} + 1\binom{n-1}{k}.$$

Här jag har skrivit ut 1:or. Varför? Jo de anger antalet sätt att gå från $\binom{n}{k}$ till var och en av de andra. Det finns ju bara ett sätt till $\binom{n-1}{k-1}$, och ett sätt till $\binom{n-1}{k}$. Sätt nu in

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}$$

och

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

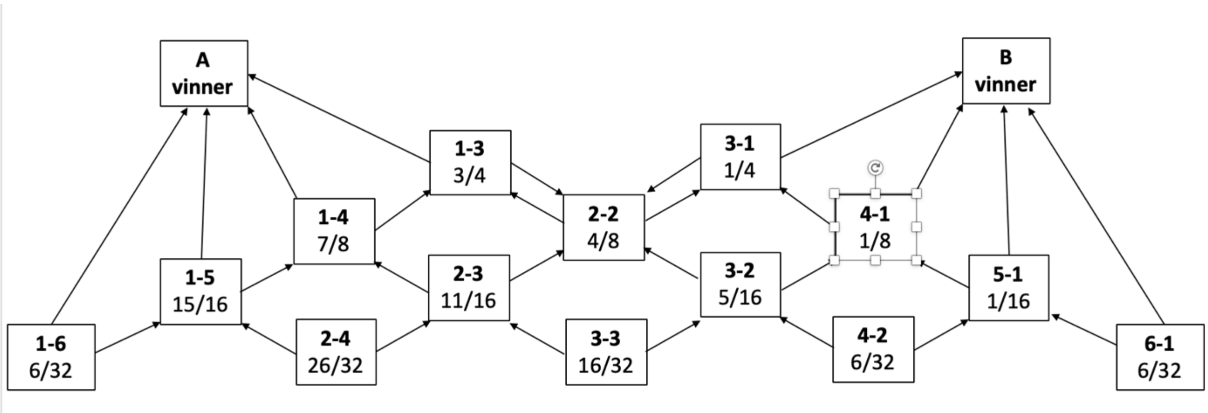
Det ger

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = 1\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + 1\binom{n-2}{k}$$

Nu har vi gått två steg uppåt från $\binom{n}{k}$, som gav koefficienter 1 2 1. Tvåan i mitten betyder att vi har använt två kopior av talet $\binom{n-2}{k-1}$ för att beräkna $\binom{n}{k}$. Det betyder också att det finns exakt två sätt att gå från $\binom{n-2}{k-1}$ till $\binom{n}{k}$. Vid nästa steg blir koefficienterna 1 3 3 1, svarande mot antal vägar till de fyra platserna.
Så koefficienterna som uppträder till binomialtalen är också binomialtal!
De noterar också antalet vägar. När man till slut hamnar på första raden, är alla koefficienter som bekant noll, utom en enda. Den enda är 1, och har faktor $\binom{n}{k}$. Detta kan tolkas att topp-1:an bidrar $\binom{n}{k}$ gånger till värdet som står på denna plats, som svarar mot varje möjlig väg man kan gå dit.
Men om vi nu har med alla ettor till vänster om topp-1:an också, så får vi med även de binomialtalen i summan. Klart!

Racketsporter

Om man som i racketsporterna kräver en skillnad på minst två för att vinna försvinner rutan 1-1. Dessutom blir 2-1 till 3-1 och 1-2 blir till 1-3. Det beror på att om en spelare vid 2-2 vinner en boll så kommer motståndaren samtidigt en boll längre från att vinna. Från 2-2 blir det 1-3 eller 3-1. Inte 1-2 eller 2-1.



På samma sätt: från 2-3 blir det antingen 1-4 (inte 1-3) eller 2-2. Man kan i figuren räkna antalet rutor från 1-4 till ”B vinner” följande pilarna – det är mycket riktigt 4 steg.

Detta ger samma triangel som tidigare, men poängställningarna som svarar mot värdena på triangelns kanter är inte samma som i det förra fallet.

Matematik, verkligheten och eleverna

Det är naturligtvis intressant att jämföra dessa sannolikheter med data från olika sporter. Det kan vara en intressant uppgift för sportintresserade elever. Att förklara systematiska avvikelser kan säga en del om sporten. Både sådana som är allmänna för en sport, och vissa spelares speciella avvikelser. Och det är förstås möjligt att genomföra samma analys med en annan vinstsannolikhet för spelare A mot B än 50%.
Jag har tyvärr inga referenser för ”Pascals summatriangel”. Jag inte hittat denna triangel i någon publikation. Men en fantastisk bok om diskret matematik, med ett långt kapitel om enbart binomialtal, är *Concrete Mathematics* av Knuth, Patashnik och Graham. Här beräknas många olika summor av binomialtal till explicita formler. Författarna noterar dock att för en delsumma, som den som den som dök upp i denna artikel, finns ingen explicit formel.

Referenser

Knuth D., Patashnik O., Graham R., *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, 1994.
Lennerstad H., *En tennisgåta,* Nämnaren nr 4, 2019.