Håkan Lennerstad

En tennisgåta

Har du förstått det kluriga sättet att räkna poäng i tennis? Här presenterar Håkan Lennerstad, professor emeritus i matematik vid Blekinge tekniska högskola, en gåta som handlar om varför han numrerar de bästa lägena för att vinna ett gem i tennis på följande sätt: 1–2–3–4–5–5,5–8.

Ordet ”tennis” lär ha kommit från engelskans ”tenetz” (i sin tur från franskan) som betyder ”ta” eller ”hålla”. I början ropade den som servade ”Tenetz!” vid varje serve, ett ständigt ropande som blev namnet på sporten. I tennis används som bekant en något märklig poängräkning med först 15, sedan 30 och därefter 40. Det är klart att det skulle vara samma spel om man använde 1, 2 och 3 istället. Det märkliga räknandet har historiska orsaker, som troligen har med klockan att göra. 15 är första kvarten, 30 andra, 45 nästa, som senare förkortades till 40. Då skulle 60 eller hel timme vara vunnet gem, men det sägs aldrig.

Boll – gem – set – match

Poängräkning i tennis sker på tre nivåer: boll, gem och set. Genom att vinna bollar försöker man vinna gem. Genom att vinna gem försöker man vinna set. Genom att vinna set vinner man matchen.

Den som har vunnit sex gem har vunnit ett set. Den som först har vunnit två set har vunnit matchen, om det är en ”3-setsmatch”, vilket innebär att vinnaren är bäst av tre set. En sådan match kan sluta 2–0 eller 2–1, räknat i set. Vid 2–0 spelas inte det sista setet eftersom det då redan är klart vem som vunnit. I en ”5-setsmatch” vinner den som är bäst av fem set. Den som har vunnit tre set har därmed vunnit matchen.

Ett gem måste vinnas med minst två bollar. Man kan inte vinna ett gem eller set genom att vinna en enda boll till om det står lika. Vid 40–40 i ett gem har båda spelarna vunnit lika många bollar. När den ene vinner en boll till kallas det Fördel för den spelaren. Därifrån blir det antingen vunnet gem om samma spelare vinner nästa boll, eller 40–40 igen. Därför kan det i samma gem bli 40–40 många gånger. Ett gem kan bli långt – hur långt som helst.

På liknande sätt måste ett set vinnas med två gem. Om det står 6–5 i ett set är det inte slut eftersom det bara skiljer ett gem. Står det 6–6 i ett set, måste någon av spelarna vinna ytterligare två gem. För att inte en match ska pågå hur länge som helst är det numera vanligt att övergå till ett så kallat ”tiebreak” vid 6–6. I ett tiebreak räknas bollarna 1, 2, 3 och så vidare, och den som når 7 har vunnit. Även här måste det skilja två bollar, så ett tiebreak kan till exempel sluta 12–10. Den som vunnit ett tiebreak har vunnit setet med 7–6. Nog är det lite mer komplicerat i tennis än i t ex fotboll, där laget som gör flest mål vinner matchen.

En gåta

Tennisgåtan handlar enbart om gem – att vinna ett gem. Antag att det är du, läsaren, som spelar. Man kan fråga sig: Vilken poängställning i ett gem vill du helst ha för att din chans att vinna det ska vara så stor som möjligt? Är 40–30 ett bättre läge än 30–0?

Det är klart att 40–0 är det bästa läget. Det kallas tre gembollar, för vinner du bara en av tre möjliga bollar så vinner du gemet. 40–0 är vårt förstahandsval, bättre läge kan du inte ha i ett gem.

1. 40–0

Det näst bäst är också ganska givet, två gembollar.

2. 40–15

Tredje bästa är inte lika självklart. Det är faktiskt 30–0 och vi ska snart se att det är bättre än en gemboll.

3. 30–0

En gemboll är fjärde bästa läget där du vinner gemet om du vinner nästa boll, precis som när det står 40–30. 'Fördel läsaren' är faktiskt samma läge som 40–30. Vinner du bollen så har du vunnit gemet, förlorar du så är det 40 lika.

4. 40–30 eller Fördel läsaren

Det femte bästa läget är 30–15.

5. 30–15

Därefter kommer läget 15–0. Av en mystisk anledning som vi återkommer till numrerar vi inte det med siffran 6, utan med 5,5.

5,5. 5–0

Slutligen har vi lika läge, till exempel 0–0 eller 40–40, som vi lustigt nog numrerar med 8.

8. 0–0, 15–15, 30–30, 40–40

Tennisgåtan

Varför den konstiga numreringen av alternativen:

1, 2, 3, 4, 5, 5,5 och 8?

Hur stor är chansen att vinna varje boll?

Den udda numreringen utgår från att du har 50 % chans att vinna varje boll. Det är artikelns grundantagande. Är det ett rimligt antagande? I många matcher vinner spelarna nästan lika många bollar, så det kan vara ett ganska troligt grundantagande. Utifrån ett sådant antagande kan man mäta hur spelarna avviker och därmed upptäcka deras individuella kvaliteter. Systematiska avvikelser kan säga en del om psykologin i tennis.

Ett exempel på det är en breakboll. Det är ett läge där den som inte servar kan vinna gemet genom att vinna bollen – göra ett break. I flera matcher har jag observerat att cirka 30 % av breakbollarna blir break, då servaren alltså vinner cirka 70 % av dem. Det bör jämföras med hur stor andel av bollarna som servaren brukar vinna. Är det klart mindre än 70 % så pågår kanske någon särskild psykologi vid en breakboll. Jag har dock inte hittat någon utförlig och trovärdig statistik om denna situation.

Lite kort om sannolikheter

Ett mynt har två sidor, krona och klave. Om man singlar en slant är sannolikheten att få en klave $\frac{1}{2}$. Om man singlar två mynt, är sannolikheten att få klave på båda två $\frac{1}{4}$. Ett argument för sannolikheten $\frac{1}{4}$ är att det finns fyra möjligheter som alla är lika sannolika: klave–klave, klave–krona, krona–klave och krona–krona. Alla borde inträffa ungefär lika ofta, så klave–klave borde inträffa i snitt en gång av fyra. Summan av sannolikheterna för alla möjligheter ska alltid vara 1. Sannolikheten att få bara klave med tre mynt är $\frac{1}{8}$ eftersom det då finns 8 möjligheter som är lika sannolika: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Detta är en multiplikationsprincip som är viktig i statistik. Om händelserna A och B är oberoende, så är sannolikheten att båda inträffar produkten av deras sannolikheter.

Gåtans svar

Numreringen anger risken att du inte vinner gemet
mätt i antal 16-delar 1, 2, 3, 4, 5, 5,5 och 8

Något som var överraskande för författaren var att de fem bästa alternativen då får numreringen 1, 2, 3, 4, 5.

Att kasta tre mynt och få tre klave är samma situation som att din motståndare vinner tre bollar när du leder med 40–0, utifrån grundantagandet om 50 % chans att vinna eller förlora en boll. Förlorar du tre bollar blir läget 40–40. I detta läge är det 50 % chans att du vinner gemet. Det gör att *risken att du inte vinner* gemet när du leder med 40–0 är $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. Vi byter således från ordningstal till sannolikheter, närmare bestämt sannolikheten att förlora i det uppkomna läget. I det bästa läget för att vinna är sannolikheten $\frac{1}{16}$ att du förlorar.

Om det står 0–0, eller lika på något annat sätt, är självklart *risken att inte vinna* $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$. Därför numreras 0–0, 15–15, 30–30 och 40–40 med 8.

De övriga fallen kan vi nysta upp bakifrån. Antag att det står 40–30. Då kan spelet fortsätta på två sätt. Antingen vinner du bollen och då vinner du gemet, eller så förlorar du bollen och då blir läget 40–40. I första fallet är sannolikheten att du vinner bollen $\frac{1}{2}$, vilket leder till situationen att sannolikheten att du förlorar gemet är 0 (du har ju vunnit den). I det andra fallet är sannolikhet att du förlorar bollen $\frac{1}{2}$, varpå det blir 40–40 och i det läget är sannolikheten att inte vinna $\frac{1}{2}$. Sammantaget gör det att om det står 40–30 är *risken att inte vinna* $0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, som är $\frac{4}{16}$. Vi lägger ihop alla olika sätt att få samma resultat. Ställningen 40–30 anges därför med siffran 4.

Sannolikheten vid ställningen 40–15 kan vi få fram med ett liknande resonemang som det nyss beskrivna. *Risken att inte vinna* blir $0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$. Ställningen 40–15 är det näst bästa läget med sannolikheten $\frac{2}{16}$ att inte vinna, och anges därför med siffran 2.

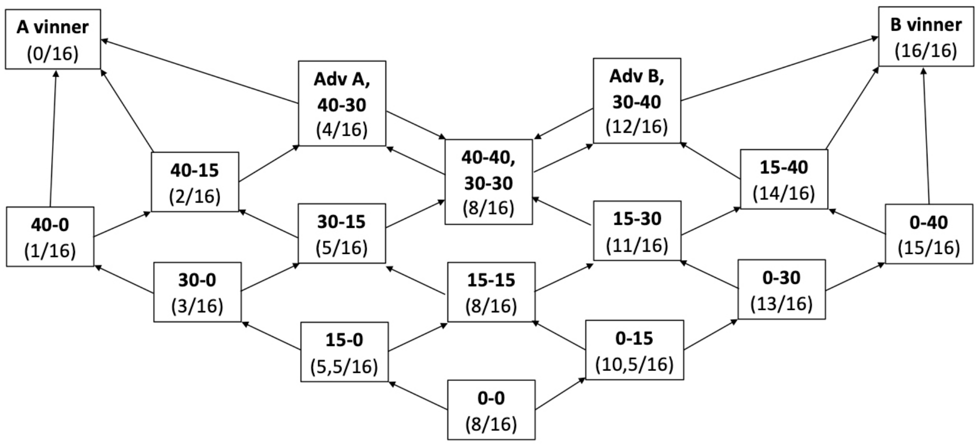
På ett liknande sätt får vi också 30–15, som kan bli 40–15 och 30–30 med lika sannolikhet. Det vill säga $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$. När sannolikheten att inte vinna är $\frac{5}{16}$ anges det med siffran 5.

Nu kommer vi till påståendet att 30–0 faktiskt är ett bättre läge än en gemboll. Vid 30–0 kan vi med lika stor sannolikhet antingen förlora en boll och hamna på 30–15 eller vinna en boll och hamna på 40–0. *Risken att inte vinna* är därför $\frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16}$, som vi betecknar med siffran 3, vilket är bättre än $\frac{4}{16}$ som är risken vid en gemboll.

Slutligen har vi 15–0, där risken att inte vinna är $\frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{32} = \frac{5{,}5}{16}$. I 16-delarnas namn ”numreras” då 15–0 med 5,5 (trots att det är det sjätte bästa alternativet).

Markovkedja

Diagrammet på nästa sida anger alla vägar som ett gem i tennis mellan spelarna A och B kan ta, med sannolikheter för att A förlorar och B vinner. Till exempel när A vinner är sannolikheten att A förlorar $\frac{0}{16}$. Det finns 17 olika lägen, medräknat ”A vinner” och ”B vinner”. Vi betraktar Fördel A (Advantage A, förkortas Adv A) och 40–30 som samma läge (liksom Fördel B och 30–40). Även 40–40 och 30–30 betraktas som samma läge. En pil åt vänster i bilden svarar mot att A vinner bollen, en pil åt höger innebär att B vinner den.



Matematiskt kallas detta en Markovkedja. I denna speciella Markovkedja är alla övergångssannolikheter ½, i enlighet med vårt grundantagande. Om statistiken visar att servaren i genomsnitt vinner till exempel 60 % av bollarna istället för 50 %, får man beräkna sannolikheten utifrån den premissen. Då är det mer gynnsamt att serva och situationen blir asymmetrisk. Det innebär till exempel att man får göra olika kalkyler för 30–0 och 0–30.

En exponentiell avslutning

En relaterad fråga är: Varför blir det inte några enormt långa gem, som varar i flera timmar, eller till och med dagar? Ett svar på det är att sannolikheten för detta går mot noll mycket snabbt. Om det står 40–40 är sannolikheten att matchen är slut efter *b* bollar, $2^{-b/2}$ eftersom varannan boll måste vinnas av den som inte har Fördel för det ska bli ett nytt 40–40.

Talet $2^{-b/2}$ går mot noll extremt snabbt när *b* blir större och större. Man säger att den är exponentiellt avtagande mot noll och därför inträffar det i verkligheten inte några gem som är flera timmar långa. I alla fall extremt sällan.

Det längsta kända gemet i herrtennis hade 40–40 totalt 37 gånger och varade 31 minuter. Spelarna heter Anthony Fawcett och Keith Glass och det var i en turnering i England 26 maj 1975. Ett gem i damtennis mellan Noelle van Lottun och Sandra Begijn, i Indoor German Championships 12 februari 1984, tog 52 minuter. Men här finns också den mänskliga faktorn. Någon gång kan det ha hänt att två spelare i hemlighet kommit överens om att spela det längsta gemet någonsin …

Detta är relaterat till det klassiska problemet med schackbrädet och vetekornen. Om jag placerar ett korn på första rutan, två på den andra, fyra på den tredje, och vidare varje gång fördubblar antalet korn på nästa ruta, hur många vetekorn har jag då totalt placerat ut?

Svaret är att efter *r* rutor har vi $2^r - 1$ korn, det är *exponentiellt växande*. Så svaret med schackbrädet är $2^{64} - 1$ vetekorn. Men 2^{64} vetekorn är mer än 1000 gånger världens totala årsproduktion av vete. Exponentiellt växande eller avtagande bör man ha respekt för. De börjar stillsamt, men fortsätter mycket kraftigt. Mot noll eller mot oändligheten.

Läs mer om tennisrekord på
swinnis.com/blogs/swinnis-blog/five-shocking-tennis-records-that-will-amaze-you