# Översättningar matematiska-svenska

## kan överbrygga formellt och informellt

*Håkan Lennerstad,*
*docent i tillämpad matematik vid Blekinge Tekniska Högskola*

**Abstrakt**

Alla människor i alla åldrar tänker matematiskt. Matematik är en mänsklig egenskap och förmåga. Men detta tänkande behöver varken likna formler eller figurer som finns i matematikböckerna. Hur kan vi dra in detta tänkande i skolmatematiken? Hur kan vi använda ”officiell matematik” till att bekräfta och stärka detta, och samtidigt, i andra riktningen, fylla formell matematik med mera mening?

Många lärare har funnit sätt att lyckas med detta, helt eller delvis. Möten med elever kan vara en stark inspirationskälla. Många lärare är kreativa, och en del lyckas med att inte drunkna i administration och organisation. Det skulle behövas mera kunskapsutbyten mellan praktiker, och systematiska sammanställningar av lärares erfarenheter.

Vi har alla målet att verbalisera matematik, att elever ska utveckla en matematisk kompetens som de själva äger och är stolta över. Men för att lyckas med det är det avgörande att förstå det material man sysslar med, alltså ämnets karaktär. Denna artikel tittar närmare på matematisk kunskap och det viktigaste sättet det uttrycks på: symbolerna. Ett sätt att öppna kanalerna mellan ”officiell” och ”inofficiell” matematik föreslås, nämligen att arbeta med *översättningar* mellan matematiska och svenska.

Översättningar kan ha många fördelar.

1. De kan avdramatisera matematikens officiella språk, matematiskan, och synliggöra dess funktionssätt i konkreta exempel.
2. De kan öppna för diskussion om de rika matematiska betydelser som döljer sig bakom symbolerna.
3. Man söker naturligt översättningar bland sina associationer, alltså i sin egen inofficiella matematik. Detta bäddar för dialoger.
4. 

Översättningar förutsätter ett utvecklat lingvistiskt synsätt på en del av matematiken. Vi beskriver härnäst detta. Vi börjar med att exemplifiera med en dialog som leder till en översättning, när de försöker komma nära betydelserna.

*Erik, Pernilla och Vivian är elever i klass 9D i Smålandaskolan. Lennart är lärare. De har en s.k. smågruppslektion, som är fyrtio minuter lång. Normalt är det fyra personer, men Niklas har förhinder idag. Läraren Lennart kommer in till den väntande gruppen.*

*Erik: Hej!*
*Lennart: Hej.*
*Erik: Hur är det idag?*

*Lennart: Jo, bra. Det var bra att vi i förmiddags äntligen fick klart med hur vi skulle ha det med reglerna för skolresan. Det ska bli kul med London! Nästa tisdag åker vi!*
*Erik: Ja. Och vi ska se på Arsenal! Jeeeeou! Men vad ska vi göra idag?*
*Lennart: Jo, bråk.*
*Erik: Bråk… men vi har redan skojat om bråk.*
*Lennart: Det har vi verkligen. Det var moget av dig att förstå det.*
*Erik ler men säger inget.*
*Lennart: Men nu börjar vi. Jag har en fråga. Vad är ½•½? Alltså, en halv gånger en halv.*
*Betänksam tystnad.*
*Erik: Det vet jag. Det blir två.*
*Pernilla: Jag tror det blir en fjärdedel.*
*Vivian: Jag vet inte alls… Jag vet inte hur jag ska tänka.*
*Lennart: Hur tänkte du, Erik?*
*Erik: Jo, delat med är tvärtom. Tvärtom från en halv är enligt mig två. Tvärtom från en tred-jedel är enligt mig tre. Så funkar det.*
*Lennart: Vad säger ni andra?*
*Pernilla: Nej… ja.*
*Vivian: Det ligger något i det resonemanget.*
*Lennart: Ja det gör det. Men det är fel.*
*Erik: Jaha…, men jag tyckte det lät bra… Vad är fel då?*
*Lennart: Det ligger mycket i det, men det har inte med **denna** formel att göra. Här är det produkt. Ni ser den stora produkt-punkten här mitt i (pekar): ½•½.*
*Erik: Ja den ser jag, den är så stor. Men det lät bra.*
*Pernilla: Men i matte räcker det inte med att det låter bra. Matte är hårt, fast, liksom, tycker jag. Det kan vara helt fel även om det låter jättebra.*
*Erik: Jag ska gå företagsekonomisk sedan, så då gör det inte så mycket.*
*Pernilla: Men du kan väl förlora alla dina pengar om du gör fel? Det har många gjort.*
*Lennart: Nu lämnar vi den diskussionen. Vad säger du Vivian?*
*Vivian: Men hur ska man tänka?*
*Lennart: Bra fråga. Du är seriös, du vill tänka först, inte bara chansa med siffrorna. Låt mig fråga: vad är hälften av 10?*
*Alla tre i kör, av en tillfällighet: 5.*
*Lennart: Och hälften av 50?*
*Alla tre (allt mer avsiktligt): 25.*
*Lennart: Och hälften av 4?*
*Alla tre: 2.*
*Lennart: Och hälften av en sjättedel?*
*Alla tre: … (alla tittar avvaktande på varandra, ingen säger något, men de börjar skratta)*
*Lennart: Men vad är hälften av en halv pizzabit?*
*Erik: En fjärdedel förstås.*
*Lennart: Där är svaret.*
*Pernilla (hoppar upp): Yaaa! Då hade jag rätt! Vad jag är smart!*
*Erik: Varför hade hon rätt?*
*Lennart: Kanske mest tur?*
*Pernilla (förorättad): Vadå tur? Så säger väl inte en lärare?*
*Lennart: Förlåt, men i de här smågruppslektionerna skulle vi ju prata lite friare, inte så lä-raraktigt. Det betyder förstås inte att vi får förolämpa varandra. Förlåt, Pernilla, men jag ska förklara vad jag menade. Men först: hur tänkte du?*
*Pernilla: Jo jag tänkte att två gånger två är fyra, då borde det bli på något sätt tvärtom, och det borde med matematikens knepiga sätt att fungera bli en fjärdedel.*

*Lennart: Ja det är bra, och det är ju rätt. Men det låter lite som du chansade med ett resonemang som verkade bra, lite som Erik chansade… var du säker?*
*Pernilla: Nej, det var jag väl inte. Konstigt egentligen, för i matte borde man kunna vara säker, det är ju ett sånt ämne. Nu förstår jag vad du menar med att jag kanske hade tur.*
*Lennart: Okej. Du Vivian kanske inte ville chansa?*
*Vivian: Neej… Men jag förstår nu när du sa det där med pizzabiten. Det var ett bra sätt att tänka. Det gillar jag.*
*Erik: Men varför var mitt fel?*
*Lennart: Det var rätt, men gäller en annan formel, en annan räkning än ½•½. Du svarade på en annan fråga.*
*Erik: Aha. Vilken fråga svarade jag på?*
*Lennart: Det tar vi sen. Men när jag skriver upp en formel måste man först se: vad är detta för en räkning, vad gäller för denna? Det gjorde du kanske inte.*
*Pernilla: Ja det bör vara den första frågan. Men jag hade rätt.*
*Lennart: Ja, du såg ett mönster, som stämde. Så fungerar ofta de som är duktiga i matte. Ofta kan de inte förklara, men de ser eller känner mönstret, och det stämmer hela tiden.*
*Vivian: Men får jag fråga: kan man alltid tänka så som med pizzan? Det måste man väl kunna? Att ”hälften av” är samma som ”en halv gånger”? Är det hälften av en tiondel, så kan man tänka på en pizza som är delad i tio lika delar, och halva den lilla biten får man. Man kan väl alltid tänka så?*
*Lennart: Ja, det är helt rätt. Det är två saker som är viktiga i det du säger. Det ena är att du tittar på formeln, vad som finns där. Finns där ”halv gånger”, så... ”Halv gånger”, eller ” ½•”, eller ” 0,5•” är formelspråk för ”hälften av”. Det är samma sak, bara sagda på olika sätt!*
*Erik: Inte konstigare. Varför har ingen sagt det förut?*
*Lennart: Det är typiskt för matematik. Det finns alltid många sätt att skriva exakt samma sak.*
*Erik: Det står inte i de böcker vi har haft.*
*Lennart: Nej, det var ju synd. Men så är det.*
*Erik: Varför stämmer det du säger och inte det böckerna säger?*
*Lennart: Böckerna säger inte emot mig. De säger andra saker. De sysslar nästan bara med att träna att räkna.*
*Erik: Det verkar onödigt med många olika sätt. Det räcker väl med ett. Jag trodde allt i matematik var entydligt…, ettydligt… eh…*
*Pernilla: Entydigt. Men det är inte onödigt med flera sätt. På svenska finns ju en massa olika ord för samma sak. Synonymer kallas det. Det verkar som vi behöver ha det.*
*Lennart: Ja det finns många synonymer i matematik också. De kommer från olika sammanhang, och vad man vill göra för något. Kan någon säga en synonym till 0.2?*
*Vivian: En femtedel.*
*Pernilla: 20%.*
*Lennart: Ja, perfekt!*
*Erik: Men, vilken fråga svarade jag på?*
*Lennart: Om man delar ett med tre så får man en tredjedel. Okej?*
*Alla: Ja.*
*Lennart: Vad får man om man delar ett med en halv? Den frågan tror jag du svarade på. Det blir två.*
*Vivian: Vad? Hur kan man tänka?*
*Pernilla: Jag visste att du skulle fråga det!*
*Lennart: Ja det är väl en viktig fråga! Jag har tänkt ut ett bra svar på det, tycker jag, innan denna lektion. Antag att du före jul gör ljusstakar i trä som du kan sälja i kyrkans basar för*

*100 kr styck. Det är 6 timmar kvar till basaren. Om det tar två timmar att göra en ljusstake, hur många hinner du göra då?*
*Erik: Tre förstås.*
*Lennart: Ja. Och om det tar tre timmar för en ljusstake? (tittar på Pernilla)*
*Pernilla: Två. Självklart.*
*Lennart: Ja. Och om det tar en timme att göra en ljusstake? (tittar på Vivian)*
*Vivian: Sex.*
*Lennart: Just det. Och det bara tar en halv timme att göra en ljusstake?*
*Pernilla: Då blir det tolv ljusstakar. Det blir 1200 kr ju! Wow!*
*Erik: Men vad var poängen med det?*
*Vivian: Det vi gjorde. (går fram till tavlan, skriver under tystnad 6/2 = 3, 6/3 = 2, 6/1 = 6, 6/½ = 12). Det sista handlar det om.*
*Erik: Var det inte jobbigt att klämma in ½ där under bråkstrecket? Fast det jag gjorde var detta (går fram och skriver 1/½=2).*
*Lennart: Just det. Det är ett dubbelbråk, 1/½. Det var det som du kom att tänka på, Erik. Men det är inte vad ½•½ handlar om. Olika grejer.*

Översättningar kan alltså vara ett sätt att ta isär och dissekera en formel, som ½•½, att undersöka dess detaljer, med hjälp av modersmålet.
Detta är en del av en dialog som används vid ett dialogseminarium i Järfälla kommun. Grundskolelärare diskuterade matematik och matematikundervisning, med översättningar matematiska-svenska som tema [ref].

**I matematik har vi två språk för tänkande**
Som vi alla vet har matematiken ett specialspråk för att uttrycka sina storheter. För enkelhets skull kan vi kalla detta specialspråk för **matematiska.** Dess alfabet består till att börja med av tio siffror, tecknen för operationer addition (+), multiplikation (·, × eller ∗), subtraktion (–) och division (/,÷, eller med hjälp av bråkstreck), samt likhetstecknet (=). Man kan genast observera att multiplikation och division har flera synonymer, ”·, × och ∗” respektive ”/,÷ och bråkstreck”. Dessutom är minustecknet ett tecken med två betydelser, det används inte bara för subtraktion. I uttrycket –3 är det en del av beteckningen för ett visst tal. I matematiska, liksom i alla språk, finns det både synonymer och dubbelbetydelser.

I matematik, till skillnad från de flesta andra ämnen, har vi alltså tillgång till *två* språk att uttrycka oss på: matematiska och svenska. Man kan tala om ett tredje viktigt framställningssätt, nämligen geometriska figurer. Matematik som skrivs helt utan formler brukar kallas **retorisk matematik**. Före 1600-talet var som bekant matematiken helt retorisk, ty matematiskan var varken uppfunnen eller etablerad. Euklides använder i Elementa enbart naturligt språk och geometri.

Symbolspråkets framväxt var en oerhörd effektivisering. Men baksidan av denna fantastiska effektivisering är en stor risk för utestängning. Språket är långt ifrån självklart för den oinvigde. Om man inte förstår detta språk, så förstår man ingenting alls. Språk är medel för kommunikation, men är också utestängande mot som inte behärskar språket. Detta är avsiktligt när det gäller hemliga språk och kanske ibland för en del slanguttryck. Tunga kriminella vet aldrig när de är avlyssnade, och kan för att vilseleda eller undgå bevisning utveckla ett nästan poetiskt metaforiskt språk.

Matematiskan har undersökts främst av logiker och filosofer. Deras främsta syfte har inte varit att göra språket så lättåtkomligt som möjligt för så många som möjligt. Detta är däremot syftet för den språkvetenskap som ligger till grund för språkkurser. Termen ”matematiska” kan vara lämplig just då språket jämförs med naturliga språk, och då man undersöker det för att göra det så lättbegripligt som möjligt. Språket betecknas som bekant oftast med ”matematikens symbolspråk” eller ”matematikens formelspråk”. Dessa beteckningar är ganska klumpiga, och överdriver både skillnaden mot naturliga språk och väsensskillnaden gentemot retorisk matematik.

**Är det rimligt att kalla matematiska ett språk?**

Språkvetare är inte eniga om vad ett språk är. Begreppet ”språk” förefaller vara lika svårt att definiera som begreppet ”liv”. Enligt [Brown] kan man sammanställa följande kriterier på ett språk (min övers.):

1. Språk är systematiska och generativa.
2. Ett språk är en uppsättning av godtyckliga symboler.
3. Symbolerna är huvudsakligen verbala, men kan även vara visuella.
4. Symbolerna har konventionella betydelser, till vilka de hänvisar.
5. Språk används för kommunikation.
6. Språk opererar i talade samhällen eller kulturer.
7. Språk är huvudsakligen mänskligt, men eventuellt inte begränsade till en mänsklig domän.
8. Språk tillägnas av människor på till stor del samma sätt – språk och språklärande har båda universella egenskaper.

Lingvisten Östen Dahl beskrev matematiska som ett *hjälpspråk*, som kan liknas vid schacknotation och kemins symboler för molekyler och musikens notsystem.

Ett psykologiskt argument att beskriva matematiska som ett språk är att det är ett symbolsystem med vissa regler och betydelser *där man inte tycks ha särskilt mycket gratis från skicklighet i modersmålet*. I skolan övas matematiskan mycket, och en skicklighet uppnås. Men det behöver inte betyda att man förstår dess innebörder, eller att man kan redogöra för språkets regler. Den första halvan här är just den vanligaste kritiken av matematikkunskapernas brister. Trots att en grundläggande symbol som ”=” ganska tydligt kan översättas med ”är lika med” (eller ”har samma värde som” – som framgår av varje lexikon är det naturligt med flera översättningar med olika nyanser), så används tecknet ofta med andra betydelser i våra klassrum. Matematiksvårigheterna liknar mycket svårigheterna vid ett otillräckligt inlärt främmande språk.

**Konkurrens mellan språk**

Det faktum att vi på matematiktimmarna har ett extra språk att använda oss kan skapa förvirring. Vilket ska vi använda? Det kan bli så att man använder matematiska på bekostnad av svenska – det känns inte riktigt matematiskt att använda svenska. Det är en farlig väg eftersom vårt modersmål är vårt främsta verktyg för tänkande. Avsäger vi oss det återstår att räkna mekaniskt. Bättre vore att försöka använda svenska både för att erövra matematiskan och förståelse för matematiska förhållanden.

**Jämförelser mellan matematiska och naturliga språk**

Naturliga språk är i första hand talade, därefter nedskrivna. Matematiska är däremot ett skriftspråk i högre grad än ett talspråk. Matematiska är ett specialspråk i den meningen att det inte är användbart i alla livets områden – det gäller endast kvantitet och logik och därmed relaterade begrepp. Men det är ett sant internationellt språk genom att det skrivs på samma sätt överallt, men uttalas på skilda sätt. Detta är en likhet med kinesiskan, för kineser. Symbolerna i kinesiska och matematiska beskriver inte heller uttal, som i europeiska språk, utan betydelser. Det sägs att det inte finns dyslexi i kinesiska, vilket skulle betyda att dyskalkyli inte är en analog matematiska-svårighet. Matematiska är dock inte ett konstruerat språk, eftersom det utvecklats av en kultur och inte av någon enskild person. Det har till skillnad från esperanto men i likhet med naturliga språk undantag, dubbelbetydelser och många synonymer.

**En liten diskussion om matematiskans tecken och deras användning**
Som nämnts tidigare arbetar vi i grundskolan med tio tecken för tio siffror, några olika tecken för de fyra räknesätten, med likhetstecknet ”=” (kanske också de fyra olikheterna ”<”, ”>”, ”≤” och ”≥”), parenteser (”(” och ”)”). Vi har också decimalkommat (”,” som internationellt är en decimalpunkt ”.”) och procenttecknet (”%”). Om vi tänker oss ett enda tecken per räknesätt och tar med olikheterna, så består matematiskans alfabet på denna nivå av 23 tecken. Vi kommenterar härnäst tecknens användning, och jämför användningen med den i svenska.
Man kan till att börja med notera att parenteserna spelar en helt annan roll i matematiska än i svenska. I svenska kan vad som står inom parentes undvaras, texten fungerar ändå. I matematiska anger parenteser enbart prioritet – vad som ska räknas ut först. Det är inte alls frågan om någon som kan strykas.
Procent representerar ett praktiskt format att skriva tal. Tecknet kan alltid bytas ut mot ”·0,01” eller ”/100”, detta är giltiga översättningar av tecknet ”%”. Just som med framställningar i naturliga språk representerar en sådan översättning inte alltid rätt stil i sammanhanget.
Decimalkomma liksom minustecknet i sin tolkning att skriva negativa tal tillhör gruppen av siffror på så sätt att de är tecken som behövs för att skriva ett tal i decimalform. Detta är decimalkommats enda funktion, det måste ha minst en siffra bredvid sig.
Likhetstecknet betyder förstås bara att talen på båda sidor är lika stora. De kanske inte är samma tal på båda sidor, ty man kan diskutera om 0,2, 1/5 och 0,1 + 0,1 är samma tal. De är i alla fall olika sätt att skriva samma tal. Med språklig terminologi är de synonymer, ty de har samma betydelse. Trots att likhetstecknet används så mycket från första klass används det ofta i betydelsen ”och nu får vi”… Om man successivt ska fördubbla kan en del skriva ”1 = 2 = 4 = 8”. Det tyder på att likhetstecknets betydelse, trots all övning, inte är självklar. Jag tror att man i matematikklasserna idag sällan pratar om symbolerna och deras betydelse.

Ett vanligt problem i skolan är att skilja på ekvationer och funktioner.

Översättningar – förklaringar – tolkningar
Vad skiljer översättningar från förklaringar och från tolkningar? Jag skulle vilja säga att

**Grundskolans två generaliseringar**

En fysiker kan säga att matematik *är* ett språk. En fysiker har gott om fysikaliska betydelser, och matematiken kan för denne vara ett sätt att uttrycka detta. Men

Översättningen i paneldebatten

En vetenskapsjournalist berättade nyligen för mig att hon i skolan länge hade haft problem med matematiken. Men när hon började använda reglerna, helt enkelt, blev det mycket lätt.

Detta är intressant. Om vi läser en artikel om snöstormen på Skottland befinner sig inte vår uppmärksamhet på orden utan i dess betydelser – vi är mentalt i Skottland och ”upplever” den isande vinden och snökaoset på vägarna. Om man vill läsa matematiska uttryck på samma sätt så finner man väldigt lite. I matematik är det orden i sig som vi sysslar med, betydelserna ignoreras. Om man lyckas släppa tolkningskravet, så kan matematik bli lätt. Matematiska uttryck kan inte tolkas lika mycket. Vill man väldigt gärna tolka, så råkar man ut för problem.

Många elever har haft problem i matematik, men plötsligt har det fallit på sin plats och det fungerar alldeles utmärkt. Det är mycket sällan de själva, inte heller 30 år senare, eller läraren kan beskriva vad som hänt. Det är märkligt att så mycket i matematik är oartikulerat, t.o.m. till synes oartikulerbart.

Matriser kan representera speglingar, rotationer, skalningar och projektioner. En spegling har två (typer av) riktningar som inte förändras. En vektor som ligger i spegelns plan ändras inte alls, vilket svarar mot ett egenvärde 1 (v avbildas på v). En vektor som är vinkelrät mot spegeln ska efteråt peka ut en punkt på motsatt sida, vilket svarar mot ett egenvärde –1 (v avbildas på – v). Beviset av att en spegling endast har egenvärdena 1 och –1 använder inte alls dessa tolkningar, utan kontrollerar endast de numeriska sambanden och kalkylerna. Det använder att om man speglar två gånger så kommer man tillbaka där man började, dvs SSv är samma som v. Beviset kontrollerar det rent numeriska, och berör inte våra matematiska tolkningar.

**Referenser**

Höines-Johnsen
Lennerstad, Mouwitz
Pi Högdahl

Språk hör till våra främsta kulturella för-givet-taganden. Personer som har svenska som modersmål behöver inte reflekterad kunskap om svenska för att använda det korrekt. Kanske gäller detta även för matematikens formelspråk (som ”1 + 2 = 3” eller ”f(x) + g(y)”), vilket vi kan kalla ”matematiska”. Om lärare använder matematiska utan reflekterad kunskap så skulle detta förhållande vara en barriär för dialoger mellan elever och lärare. I så fall behöver vi lärare dialoger med elever också – för att göra matematiska till ett för oss reflekterat språk. Översättningar mellan matematiska och svenska är inte alltid så lätta att göra, men de öppnar för matematikdialoger både om vad formlerna betyder, och hur de fungerar. Det är två olika men viktiga frågor. Syftet är att man använder svenska för att erövra matematiska, samt givetvis det matematiska innehållet.

## Inledning

Låt oss kalla matematikens formelspråk (som ”1 + 2 = 3” eller ”f(x) + g(y)”) för ”matematiska”. Översättningar mellan matematiska och svenska är inte alltid så lätta att göra, men de öppnar för matematikdialoger både om vad formlerna betyder, och hur de fungerar. Det är två olika men viktiga frågor.

Lärare i skolan för ofta matematiska dialoger med elever, vilket leder till att elevernas matematiska insikt ökar. Emellertid är det lätt att detta sker på så sätt att de nya insikterna inte avspeglas i symbolerna och kalkylerna – i de matematiska uttrycken. Det är ganska naturligt att dialoger handlar om matematisk förståelse utan koppling till matematiska uttryck. Det finns då en risk att elever utvecklar en klyfta mellan å ena sidan skicklighet i matematiska och å den andra matematisk förståelse. Båda är viktiga, men det är också viktigt att de hänger ihop. Översättningar är just broar mellan de två domänerna. Dialoger som utvecklas från en översättning är naturligt en dialog om innehåll, eftersom detta är naturligare att tala om. Och den är inte isolerad från det språkliga uttrycket eftersom det är där den påbörjas, och dit den bör återvända.

Arbete med översättningar är nära matematikens nerv. Elever kan märka att deras tänkande har mer motsvarigheter i formelräknandet än de trodde, att formlerna är ett annat sätt att uttrycka sådant de redan kan. Detta kan färga formler med intuition från vardagstänkandet, och stärka associationerna. Det kan också göra det möjligt för elever att använda sitt *modersmål* för problemlösning i större utsträckning på matematiktimmarna. Det är ingen tvivel om att det egna modersmålet är det främsta verktyget vid tänkande. Ju naturligare språk vi kan använda ju bättre blir resultatet. Ibland kan det förefalla som om det i matematikklassrummen sker en sorts konkurrens mellan språk. Om man förväntas använda matematiska, så undviker man det andra språket, svenska, så mycket som möjligt. Bättre vore att använda det svenska språket fullt ut i syfte att erövra det matematiska språket.

Sett ur en lingvistisk synvinkel är det naturligt att matematiska av elever kan uppfattas som ett främmande och otillgängligt språk, även om man har många matematiska insikter som är formulerade på annat sätt. Det är också naturligt att lärare tar detta språk för givet. Det gäller i synnerhet för lärare som har haft lätt för matematiken i sin egen matematikutbildning. I sådant fall kan matematiskan ha fungerat som ett modersmål på så sätt att det tillägnats intuitivt. Då kan man använda reglerna utan att explicit känna till dess regler, på liknande sätt som svenskar talar svenska och greker talar grekiska. Detta kan vara ett problem vid mötet med elever som behöver explicita förklaringar av reglerna. Språk hör till ett av våra främsta kulturella för-givet-taganden.

Språkämnen lätta.

Vem skulle undervisa matematiska? Matematikerna som det är så självklart för, som inte tycker att något behöver förklaras? Pedagogerna, som inte vågar prata om matematik?

Konkurrens mellan språk. I matematik är modersmålet på undantag, vilket påverkar förmågan att tänka. Barn

I [] definerar barn ”tänkande” som

En och annan matematiker som har sagt mig att man kan inte översätta. Till vadå? Men man får inte förväxla matematik med matematisk kunskap. Matematik är exakt, men det är inte matematisk kunskap. Den kan dock bli alltmer exakt, om den vidareutvecklas.

De ger också möjligheter för läraren att synliggöra matematikens struktur genom att ge effektiva överblickar. Detta illustreras i artikeln dialog angående produkten ½•½.

Om jag gör en översättning är det ofta någon som säger att jag vill översätta på ett lite annat sätt. Utmärkt. Äntligen visar vi våra tolkningar. Först då kan prata om dem, och utveckla en bredd i vår känsla för innehåll.
Att inte översätta är att låta formlerna tysta oss. Då låter vi det matematiska tänkandet stängas inne av formelspråket. Det matematiska tänkandet är mycket vidare än strukturen av sanningar.

Vi ger härnäst exempel på översättningar. De är kanske inte så slående effektiva, men översättningar är ingen patentmetod. Det är en verksamhet som på sikt kan öka dialogen mellan lärare och elev om matematiksakliga frågor.

Marit om betydelsen av ”50”. Vi känner oss säkra på ett begrepp om vi har en väv av betydelser och tolkkningar som sampelar. ”Bil” – osäkra om vi har problem med någon tolkningsriktning.

- Begrepp.
- Ja, vadå?

Matematiken är exakt, men en människas matematiska förståelse är det inte. Förståelsen är till stor del en metod och en aktivitet med vilken förståelsen kan bli allt bättre.

**Om innehållet under ”50” – en sammansatt väv**

I ett exempel i *Matematik som språk* beskriver författaren Marit Johnsen Høines hur Line, som är sex år, bygger upp en kunskap om vad ”femtio” betyder. Hon vet att farfar är femtio år. Han säger att det är ett halvt århundrade. När de leker kurragömma har de stora lärt Line att räkna till tio en gång för varje finger. När fingrarna har tagit slut har hon kommit till 100. Hon vet att hon har kommit halvvägs när hon är klar med ena handen, och ropar då ”Femtio!”. Line har ännu inte sett eller använt symbolen ”50”, och hon vet inte om femtio är större eller mindre än fyrtioåtta. Genom en fortsatt dialog och samvaro med Line är det säkert möjligt att notera fler kunskaper, frånvaro av kunskaper och andra attityder som är relaterade till begreppet ”femtio”. Varje människa har också kunskaper som hon aldrig formulerar i ord men utan vilka hon inte skulle klara vissa situationer – tyst kunskap.
Line kommer genom åren att utöka sin repertoar av insikter, tolkningar, användningar, övergångar, kalkyler och omtolkningar för ”femtio”. Det begrepp som kan betecknas med ordet ”femtio”, eller med symbolen ”50” växer ut till en komplex väv av tolkningar, räknesätt, associationer och betydelser. Denna väv är delvis individuell, men mycket kan väntas vara gemensamt för olika personer. Det är också väletablerat att det finns kunskap som existerar endast *mellan* människor. Den är verkningsfull i vissa möten, men inte annars. Olika personer har olika pusselbitar till kunskapen, som tagna för sig är meningslösa (referens). Kunskap måste inte vara individuell.

Höines exempel illustrerar att innehållet under en formel är något mycket komplext. Detta står i skarp kontrast till den enkelhet symbolen i sig uppvisar.

Således: innehållet ”under” varje matematiskt begrepp består av en komplex väv av tolkningar och sammanhang, som förlorar sig i det individuella, psykologiska och intuitiva, om än en hel del är gemensamt. Den gemensamma, kulturella delen kan man utnämna till Innehållet.

**En text är också en väv**

En text kan faktiskt på liknande sätt jämföras med en väv, som Sven-Eric Liedman beskriver i

*Ordet "text" kommer från latinets textum som betyder väv. ... Den text som vi uppfattar med ögonen är inte en väv utan separata rader av bokstäver. Det är först när vi läser texten och den får en innebörd för oss som vi kan uppleva den som en väv.* Man kan också tala om *begreppet intertextualitet, som innebär att varje text oavlåtligt genljuder av andra texter. ... Varje text är en väv av citat från tidigare texter. Barthes betonar att intertextualiteten inte kan reduceras till en fråga om källor och influenser. Den innefattar också anonyma talesätt och slitna vändningar vars upphov vilar i dunkel.*

**Oenigheter visar rikedomen**

## Är innehåll något som *känns*?

*Minidialog (i köket, strax före middagsdags):*
Veronica: Mamma, jag vill ha tal att lägga ihop.
Mamma slår på spisens platta 3 på högsta värme.
Mamma: Mmmm, 13 och 16.
Veronica: Nej, större tal!
Mamma: På 20? Räknar du med 20 redan?
Veronica: Ja!
Mamma: Okej, 26 och 24.
Det blir tyst. Dottern börjar plita i sin skrivbok.

För Veronica, liksom i stor utsträckning för forskande matematiker, är formlerna arbetsmaterialet. För dem är matematik är mycket konkret, den är framförallt tecknen på pappret. Dessa tecken har dock vissa regler, vars konsekvenser Veronica och forskarna ägnar sig åt att upptäcka, vilket ofta är lustfyllt. Jag vill här påstå ett svårbevisat påstående: att både Veronica och matematikerna *känner* innehållet under räknandet. Man vet eller är övertygad om dess relevans, men man sysslar inte explicit med relevans eller tolkningar. Däremot är denna känsla en viktig bakgrundston som .laddar matematikaktiviteten Relevansen är en På detta sätt är matematik emotionellt

**Innehåll leder till mening**

Men känns matematik *meningsfull* om man har koll på innehållet? Ja, jag tror det. För de två uttrycken "ha koll på" och "innehåll" ställer ganska höga krav. En rik uppfattning av innehåll bakom ett begrepp betyder att det finns så många tillämpningar och användningar av begreppet att dess *relevans* är uppenbar. Om man har koll på detta innehåll så fungerar kopplingarna mellan skilda tolkningar och räknesätt och motsvarande symboler, så att det hela *fungerar*. Det är ändå inte säkert att matematiken för med sig positiva associationer, men den är både potentiellt och faktiskt användbar, vilket innebär en meningsfullhet. Om den även är ett intresse, en positiv aktivitet, har den dessutom en personlig mening.

**Innehållet *under* formlerna**

Det är klart att uttrycket ”innehållet *under* formlerna” är metaforiskt. Som om man kunde bokstavligen lirka loss på bokstäverna från papprets yta och lyfta dem, och där under se innehållets former röra sig. Det är en metafor som kan ha ett värde genom att ladda detta samband – mellan symbolerna, som strömmar i massor mot läsaren från boksidorna i matematiktexter på alla nivåer, och det så viktiga men för många svåråtkomliga innehållet. Metaforen kanske starkare knyter ihop meningarna med formlerna. Ett innehåll, om än outtalat eller osynligt, finns nära symbolerna. Det är starkt knutet till det. Ingen tycker om tomma symboler.

Analogt, om man lyssnar på en konsert är det mycket som är tydligt och påtagligt (ljudet, musikerna, klädseln, rörelsesättet, instrumenten, scenen, publiken,,,), men själva *känslan* som är är självklart knuten till konserten är kanske inte direkt synlig eller uttalad.

Det är svårt att definiera vad ”språk” betyder, på liknande sätt som ”liv” inte är lätt att definiera.

Derrida: staden utan människor.

Var finns innehållet i allt vårt räknande? Jag säger: inte i formlernas perfektion, utan i deras sprickor. Översättningarna gör sprickorna fullt synliga, så meningen och motivationen kan välla fram. Matematiker kan säga ”Översätta är omöjligt, för vad ska man översätta till??”. För de vänder bort huvudet om de ser sprickor i matematiken. De säger att om man måste se matematikens svagheter för att lära sig den, så är det bättre att inte lära sig.

**Är matematik lätt eller svårt? Nej!**

Rubrikens fråga är missledande. Jag menar att det verkligt karaktäristiska för matematik är att ämnet ibland är mycket lätt och ibland mycket svårt. Det karaktäristiska är att *svårighetsgraden pendlar mycket kraftigt*. Om en pusselbit fattas kan ett problem vara helt omöjligt, men när denna blir tillgänglig kan samma problem framstå som självklart. I dessa pendlingar ligger mycket av matematikens skönhets- och Aha!-egenskaper.

Emellertid, för en elev som tappat tråden kan nog matematik vara svårt, rätt och slätt. Matematiktimmarna är inte mycket mer än en sorglig närvaroplikt. För andra elever är matematik helt enkelt ständigt lätt. Som framhålls av verksamheten angående elever med särskild fallenhet för matematik är det svårt att skilja på uttråkade elever och elever med matematiksvårigheter. Det är synd att matematikens svårighetsgrad i skolan ofta är så ständigt lagom och färdigtuggad. Det är sövande för eleverna och främmande för matematiken. Det vore bättre att ibland provocera elever med ”för lätta” problem såväl som ”för svåra”. Man måste inte alltid nå fram till en fullständig lösning.

Om det är självklart att typiskt för matematik är att svårighetsgraden pendlar våldsamt, så är det naturligare att man som lärare råkar ut för matematikproblem som man inte genast klarar. Det är alltså lättare att vara autentisk som lärare.

**Språk vill tolkas**

Man kan höra vuxna som i skolan har haft problem med matematik, men när man kom på att det är bara att använda reglerna, så var det lätt. Lösningen kanske var att inte bry sig om att tolka uttrycken. Är man ambitiös kanske man vill *förstå*. Detta är inte lätt när det gäller matematik.

**Sammanfattning**

Poängen med översättningar är att den går i närkamp med något mycket centralt i matematiken och som många elever känner störst främlingsskap till: symbolspråket, matematiskan.

Översättningar mellan matematiska och svenska är alltså en metod som på sikt kan

1. Öka användningen av modersmålet på matematiktimmarna, vilket gör lektionsverksamheten intelligentare eftersom modersmålet är vårt främsta tankeverktyg.
2. Skapa associationer om betydelser för abstrakta storheter eller samband.
3. Skapa associationer angående matematiskans symboler och sätt att fungera.
4. Förbättra kommunikationen mellan lärare och elever genom översättandets gemensamma associerande. Det kan därmed också framgå att ingen kan all matematik men alla kan något.
5. Vi lärare kan upptäcka funktionssättet för det språk som de flesta av oss absorberat på intuitivt sätt.

Brown, Douglas *Principles of Language Learning and Teaching*, Prentice Hall, 1993.