Addition, multiplikation, ...

Håkan Lennerstad
Blekinge Tekniska Högskola

Hur fortsätter rubrikens följd? Det är ämnet för denna artikel. Den är avsedd som ett stycke underhållningsmatematik på så sätt att kommentarer görs ibland som inte hör strikt till ämnet, och bevis lämnas åt läsaren. Den har initierats av ett tentamensproblem i diskret matematik.

En första konstruktion av efterföljande räknesätt

Vilket räknesätt kommer efter multiplikation? Det är en fråga som kan dyka upp redan på grundskolan, när potenser introduceras. Det är förstås möjligt att, för hela tal, se multiplikation som upprepad addition: $x \cdot n = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ st}}$. På liknande sätt får vi potenser genom upprepad multiplikation: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ st}}$. Detta skulle tala för att utnämna nästa räknesätt till upprepad exponentiering, förslagsvis kan detta skrivas som

$\overset{n}{x} = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^{x}}}}}}}_{n \text{ st}}$. Upprepning av detta räknesätt i sin tur kan då skrivas: ${}^{n}x = \left.\begin{matrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \\ x \end{matrix}\right\} n \text{ st}$. Fortsättning av den beteckning som börjar med exponentieringen skulle ge en följd av räknesätt som successivt flyttar sig 45°moturs. Notera att om vi lägger ihop två och två blir resultatet oberoende av räknesätt: $4 = 2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2 = \overset{2}{2} = {}^{2}2 = \ldots$

Dock saknar redan exponentieringen en fundamental egenskap: kommutativitet. Kommutativa lagen säger att om vi byter plats på talen så får vi ändå samma resultat. I matematisk (och åtskilligt mera entydig) formulering har vi för addition $x + y = y + x$, och för multiplikation $x \cdot y = y \cdot x$, båda gäller för alla tal x och y. Däremot gäller tyvärr inte $x^y = y^x$ för alla tal x och y. För att motbevisa detta räcker det med ett enda motexempel, förslagsvis x=2 och y=3: $8 = 2^3 \neq 3^2 = 9$.

En andra konstruktion - huvudkonstruktionen

Den gren av matematiken som sysslar med olika talsystem och räknelagar för dem, bland annat, kallas som bekant algebra. Nu vill algebraikerna att två räknesätt ska samverka på ett speciellt sätt: enligt den distributiva lagen. För addition och multiplikation betyder det att man ska kunna multiplicera in i parenteser. Nämligen: $x(y + z) = xy + xz$ och $(x+y)z = xz + yz$.

Om vi formulerar detta för två räknesätt betecknade med, ① och ②, säg, ska vi alltså ha: x②(y①z) = (x②y)①(x②z) (utskrivet med ① som + och ② som · ger vanliga lagen tillbaka), och på samma sätt vid högermultiplikation i en parentes. Man vill gärna även ha kommutativitet - den krävs för ①, och är önskvärd för ②.

Logaritmer förvandlar som bekant multiplikation till addition genom logaritmlagen

$\log xy = \log x + \log y.$

Detta faktum bygger som bekant räknestickan på: addition av längd på stickan blir multiplikation. Genom att exponentiera båda leden kan vi uttrycka multiplikation i addition:

Definition 1: $x \cdot y = 2^{\log x + \log y}$.

Detta gäller om x och y är positiva. Lägger vi till att $x \cdot y = 0$ om x eller y är noll och känd teckenregel för multiplikation, så har vi uttryckt multiplikation i addition för alla reella tal. Här är det möjligt att använda vilken bas som helst, jag har valt basen 2 som f. ö. föredras av informationsteoretikerna. Basen 2 ger fler heltal i kalkylerna än den naturliga basen e = 2.718... . Logaritmer är således i denna text 2-logaritmer.

Nästa räknesätt

Låt oss säga att addition är det 0:te och multiplikation det 1:sta räknesättet: vi betecknar alltså $x + y = x ⓪ y$ och $x \cdot y = x ① y$. Låt oss nu tillverka ett nytt räknesätt genom att uttrycka nästa räknesätt (②) i multiplikation analogt med hur multiplikation uttrycks i addition enligt Definition 1:

Definition 2: $x ② y = 2^{\log x \cdot \log y}$ $(= x^{\log y} = y^{\log x})$.

Genom att sätta in Definition 1 kan vi därmed också uttrycka ② i addition:

$x ② y = 2^{2^{\log(\log x) + \log(\log y)}}$.

Det är omedelbart klart att denna operation är kommutativ, eftersom $\log x \cdot \log y = \log y \cdot \log x$. Därmed kommer vi att hålla oss till detta andra förslag - det saknar det första förslagets nackdel.

Det nya räknesättet är således kommutativt eftersom det föregående räknesättet är det. Dessutom kan man lätt kontrollera att ② tillsammans med · uppfyller de distributiva lagarna. Detta är en övning i potensregler.

Notera att exponentiering kan uttryckas i ②. Inte som $x ② n$, enligt den första förhoppningen, men som $x^n = x ② 2^n$.

Näst-nästa räknesätt

Ingenting hindrar oss nu från att gå vidare och definiera nästa räknesätt i det föregående:

Definition 3: $x ③ y = 2^{\log x ② \log y}$.

Med Definition 1 och Definition 2 kan även ③ uttryckas i addition:

$$x \text{③} y = 2^{2^{2^{\log\log\log x \,+\, \log\log\log y}}}.$$

Nästa$^{(i\text{-}1)}$ räknesätt

Vi kan på detta sätt fortsätta och definiera nya räknesätt ⓘ, där i = 0, 1, 2, ... Med viss upprepning kan vi således definiera iterativt:

Definition i: Om $i = 0$, $x \text{⓪} y = x + y$, annars $x \text{ⓘ} y = 2^{\log x \,\textcircled{\tiny i-1}\, \log y}$.

Vi noterade att exponentiering kan uttryckas i ② som $x^n = x \text{②} 2^n$. Man kan ställa sig frågan: kan $\overset{n}{x}$ uttryckas i räknesätten ⓘ, som definieras i det följande? I så fall hur? Undertecknad har inte tittat närmare på denna fråga.

Ringisomorfism-begreppet gör det hela enkelt

Ur algebraisk synpunkt är konstruktionen mycket enkel. Funktionen $f(x) = 2^x$ skickar de reella talen **R** till de positiva rella talen $\mathbf{R}^+$, eftersom 2^x alltid är positivt vilket reellt tal x än är. Funktionen uppfyller ytterligare egenskaper som berättigar den till hederstiteln *ringisomorfism* från ringen <**R**,+,·> till ringen <$\mathbf{R}^+$,·,②>. I beteckningen <**R**,+,·> betyder **R** mängen av reella tal, därefter kommer beteckningar för de två räknesätten som ska uppfylla distributivitet och ett par andra villkor. $\mathbf{R}^+$ betecknar de positiva reella talen.

En ringisomorfism parar ihop elementen i de två mängderna, ett i den ena hör ihop med endast ett i den andra, så inget element blir över (en bijektion). En ringisomorfism måste också avbilda räknesätten på varandra: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ samt $f(x\cdot y) = f(x) \text{②} f(y)$. I argumentet till f (vänster sida av likheterna) pågår operationen i den första ringen, som har räknesätten + och ·. "Utanför" f (höger sida av likheterna), för f:s värden, befinner vi oss i den andra ringen där vi bara kan räkna med · (här även betecknat med ①) och ②.

Genom att stoppa in vad f och ② är får vi likheter att visa utan några konstiga tecken - vi har översatt till vanlig matematik. Dessa likheter är lätta att visa, de är nya övningar i potenslagar. När man har lyckats visa att f är en ringisomorfism, så följer samma räkneregler för den andra ringen. Eftersom den första är kommutativ är den andra också det. Existensen av en isomorfism kan tolkas som att de båda ringarna är identiska, vi har endast olika beteckningar. En kalkyl som kan göras i den ena kan också göras i den andra - kalkylen skrivs bara upp i en annorlunda dialekt. Det är intressant att det går att matematiskt bevisa att beteckningarna är lika. Det är alltså inte bara så att de matematiska beteckningarna uttrycker matematiska samband och bevis, ibland kan vi också bevisa något om beteckningarna.

Ett förbehåll är att ringisomorfismen bara angår ringstrukturen - det kan finnas annan struktur (som olikheter, eventuellt) som fungerar olika på de två sidorna.

På samma sätt skickar $f(x) = 2^x$ oss vidare från ringen <$\mathbf{R}^+$,·,②> till ringen <$\mathbf{R}^{\cdot}$,②,③>. Här är alltså $\mathbf{R}^+$ alla tal större än 0. Analogt betecknar vi med $\mathbf{R}^{\cdot}$ alla tal större än 1, motivationen till beteckningen kommer i nästa avsnitt.

Samma isomorfism skickar oss vidare hur många steg som helst. Nästa ring är <$\mathbf{R}^{②}$, ③, ④>, efter ytterligare 137 steg får vi ringen <$\mathbf{R}^{⑬⑨}$, ⑭⓪, ⑭①>. Som antyds av ovanstående exempel består $\mathbf{R}^{ⓘ}$ alltid av oändligt många tal, alla över en viss gräns som är enhetselementet för räknesättet ⓘ.

Enhetselement och inverser för ⓘ

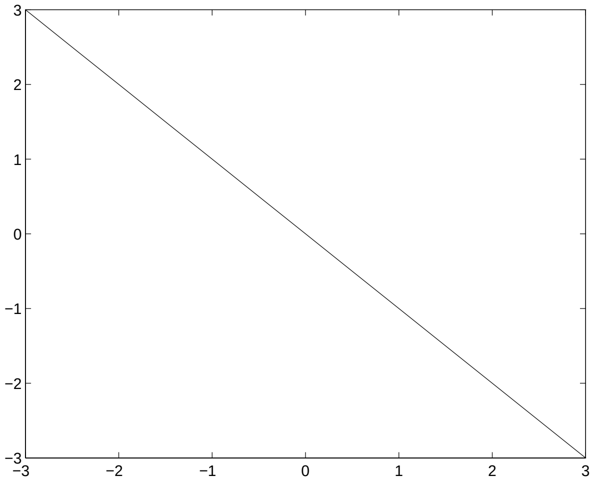
Vad är enhetselement till ⓘ? Beteckna detta med e_i. Ett enhetselement för ett räknesätt är ett tal som inte har någon effekt. Exempelvis har 0 ingen effekt vid addition: x + 0 = x säger att vi efter addition med 0 har samma tal som innan. Multiplikationens enhetselement är givetvis 1 ty x·1 = x. Vi vet alltså att $e_0 = 0$ och $e_1 = 1$. Från formeln där ② uttrycks i addition kan man se att om log log x = 0 har operation med x ingen effekt, således är x som uppfyller log log x = 0 enheten. Eftersom basen är 2 ger detta $e_2 = 2$. För enhetselementent e_i får vi i allmänhet formeln

$$\underbrace{\log \log \ldots \log}_{i \text{ st}} e_i = 0, \text{ således } e_i = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^2}}}}}}_{i\text{-1 st}}.$$

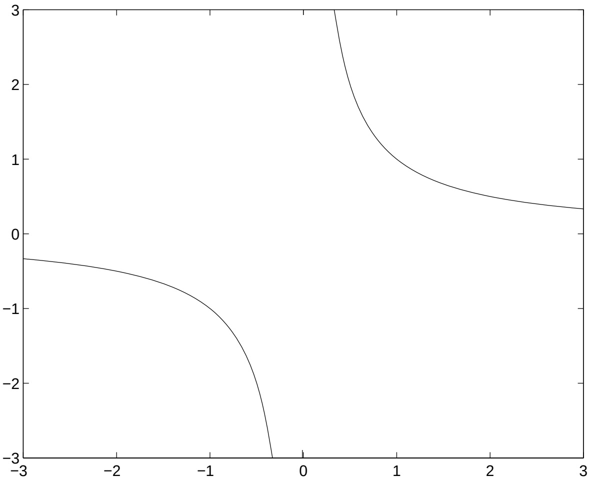
Den upprepade exponentieringen kommer därmed tillbaka in i resonemanget. Dock inte som nästa räknesätt, utan i en central roll gällande för alla följande räknesätt. Upprepad exponentiering, som e_i i vårt fall, kallas ibland “exponentialtorn” (tower of exponentials). Observera att följden av enhetselement växer långt snabbare än exempelvis fakultet ($i! = i\cdot(i - 1)\cdot(i - 2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$):

$e_0 = 0$
$e_1 = 1$
$e_2 = 2$
$e_3 = 2^2 = 4$
$e_4 = 2^4 = 16$
$e_5 = 2^{16} = 65\,536$
$e_6 = 2^{65\,536} \approx 10^{19\,608}$
$e_7 \approx 10^{\text{(tal med ca 19 000 nollor)}}$

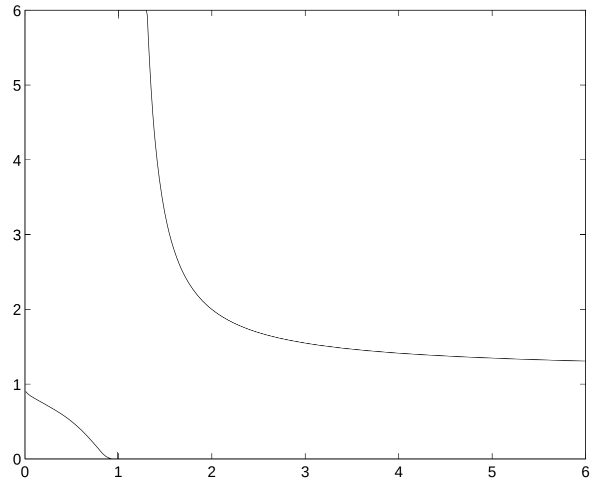
Låt oss beteckna inversen av x med avseende på ⓘ med x^{-i}, alltså x ⓘ $x^{-i} = e_i$. Vi känner $x^{-0} = -x$ och $x^{-1} = 1/x$. Från definitionerna får vi lätt $x^{-2} = 2^{1/\log x}$ och $x^{-3} = 2^{2^{1/\log\log x}}$, osv. De fyra första inversfunktionerna har grafer enligt följande:



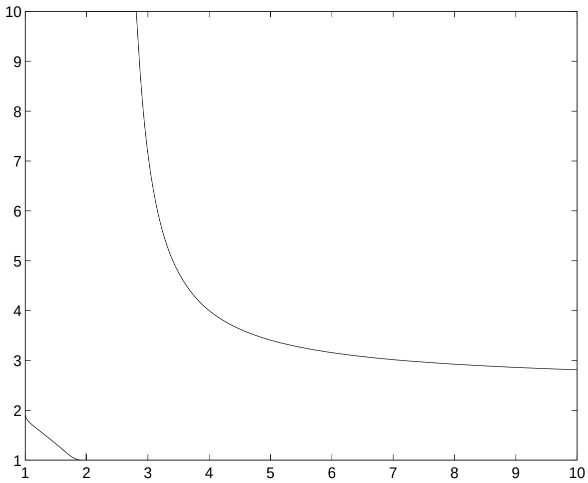
Graf av $x^{-0} = -x$.



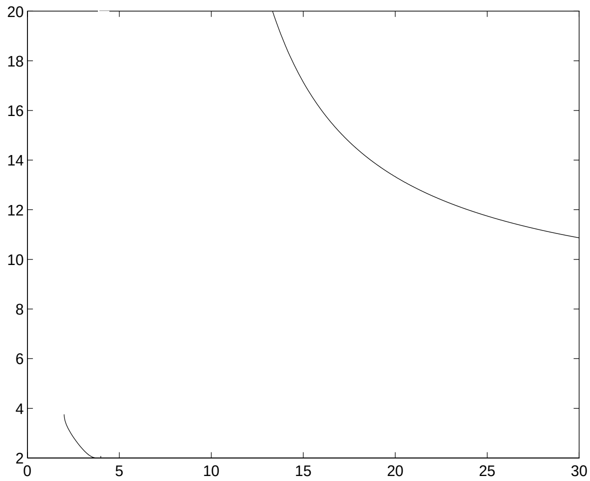
Graf av $x^{-1} = 1/x$.



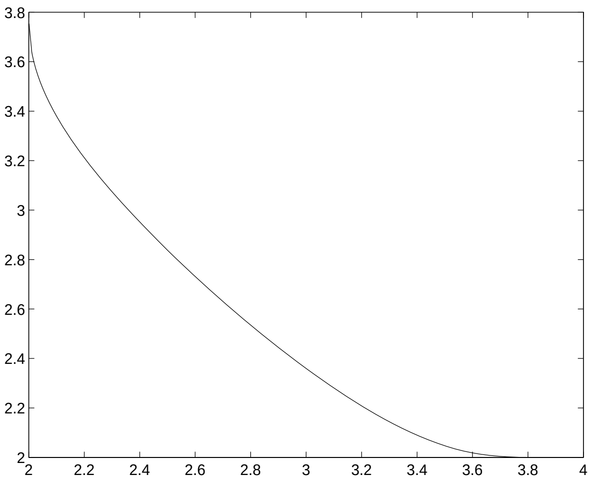
Graf av $x^{-2} = 2^{1/\log x}$.



Graf av $x^{-3} = 2^{2^{1/\log\log x}}$.



Graf av $x^{-4} = 2^{2^{2^{1/\log\log\log x}}}$.



Detalj av x^{-4}.

Inversernas omvändbarhet: geometriskt, analytiskt, algebraiskt

Som sig bör är inverserna omvändbara funktioner, definierade för alla x-värden större än enhetselementet för föregående räknesätt. Omvändbarheten kan kontrolleras genom att derivera och observera att derivatan är negativ - detta blir en övning i kedjeregeln. Samma sak kan visas räknemässigt lättare genom att visa att olikheterna överlever ringisomorfismen, därmed följer den avtagande egenskapen från att -x och 1/x är avtagande.

Man kan från figurerna gissa att inversfunktionerna är speglingssymmetriska runt linjen y=x: om man byter plats på axlarna så ser funktionen fortfarande likadan ut. Formelmässigt betyder det att inversen y till x är samma funktion som funktionen själv: om $y = 2^{2^{1/\log \log x}}$ så är $x = 2^{2^{1/\log \log y}}$ för att ta ett exempel. I välkända räknesätt, addition och multiplikation, känner vi igen detta i form av -(-x) = x och 1/(1/x)) = x. Detta är också som sig bör eftersom vi med ringisomorfismen lyft denna struktur till andra mängder. Den mängd där räknesätten (i) och $(i+1)$ gäller är $\mathbf{R}^{(i-1)} = \{x \in \mathbf{R}\colon x > e_{i-1}\}$, om $i > 0$. Därmed har vi kompletterat bilden vad gäller de oändligt många ringarna och de oändligt många räknesätten.

Kan vi använda räknesätten till alla tal?

För tal större än 0 har vi alltså tre räknesätt +, · och ②. För tal större än 1 har vi fyra, för tal större än 2 har vi fem räknesätt, osv. Två “intilliggande” räknesätt, som (840 331) och (840 332), uppfyller alltid distributiva lagen. Två icke intilliggande räknesätt, som + och ②, eller ④ och ⑨, uppfyller inte distributiva lagen. Särskilda relationer mellan dessa kan säkert härledas ur räknesättens definitioner och de intilliggande räknesättens distributiva lagar.

Desvärre kan (i) om $i \geq 2$ inte användas på alla tal, dock alltid för oändligt många positiva reella tal - de större än e_{i-2}. Så som vi definierat ② fungerar räknesättet bara för positiva tal. Kan definitionen utvidgas till alla reella tal? Vi har sett hur multiplikation uttryckt i addition kunde utvidgas till icke-positiva tal med en teckenregel ((-1)·(-1) = 1, osv). Man kan fråga sig: kan vi definiera en teckenregel för ② som fungerar?

Enklast är att prova en operation ② vars värden alltid är positiva. Detta är dock inte konsistent med entydig invers, då skulle vi få (-2)②2 = 2 = 2②2, alltså både 2 och -2 har inversen 2. Samma teckenregel för ② som för ① går inte ihop med distributiva lagen. I denna finns ju tre tal på ena sidan av likhetstecknet och fyra på den andra - om alla tal är negativa får vi då olika tecken. Det är tydligt att någotdera av distributiva lagen, det neutrala elementet eller kommutativiteten faller om man försöker definiera en teckenregel för ②. Notera i sammanhanget att addition uppenbarligen inte har någon särskild teckenregel. Dock har vi inte visat att varje konstruktion kommer att misslyckas.

Lek och allvar

Det vore ju trevligt, och kanske användbart, om samtliga räknesätt kan användas till alla reella tal. Att en intellektuell lek med estetiska förtecken så småningom leder till fundamentala tillämpbara resultat är för övrigt inte ovanligt (därmed inget sagt om denna fundering). Ett välkänt exempel är imaginära tal. Ett annat är teorin för knutar, vilken idag har mycket stor betydelse bland annat i DNA-teknik - en användning är att detektera enzym. Det bör väl sägas att det också finns gott om intellektuell lek som nog aldrig blir något annat. Man kan inte vara säker, i varje fall inte på framtiden.

Jag skulle vilja tacka Juliusz Brzezinski, som är algebraiker vid matematiska institutionen, CTH, för givande diskussioner.