Matematiska metaforer –
ett draperi av upprepad derivering

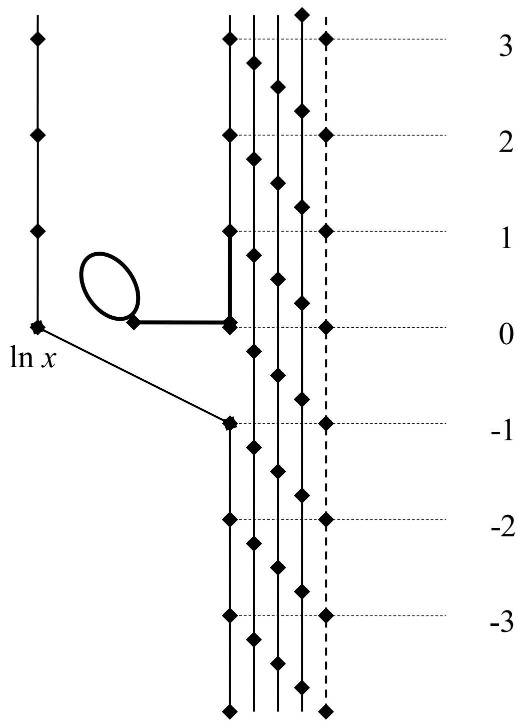
Håkan Lennerstad
Blekinge Tekniska Högskola

Sammanfattning

Många studenter uppfattar matematiken som mycket fragmentariserad – man saknar ofta helhetssammanhang. Samtidigt anser lärare ofta att insikt om de övergripande sammanhangen är centrala och något av ämnets största fascination. Denna artikel ger en överskådlig beskrivning av upprepad derivering av potensfunktioner x^a för alla reella tal a. Det visar sig att ett oändligt långt draperi med bredd 1 och två lösa trådar är en träffande metafor och helhetsbild för den matematiska situationen (Figur 1). De lösa trådarna består av alla x^a där a är positiva heltal, respektive negativa heltal. Om a är positivt slutar upprepad derivering på 0, som inte är en potensfunktion. Det är också de funktioner som uppträder vid upprepad integration, från integrationskonstanterna.

Den andra lösa tråden, för negativa heltal, hänger, via ln x, samman med en annan kedja av funktioner: $L_n(x) = x^n(\ln|x| - H_n)$, där H_n är den harmoniska serien med n termer. Beviset presenteras som en logisk graf (Figur 2).

Konstruktionen som leder till denna metafor är mycket naturlig när väl lämplig matematisk notation är utformad. Detta understryker den matematiska notationens stora betydelse för vilka matematiska idéer som framträder.



Figur 1 Draperi som metafor för upprepad derivering av potensfunktioner.

Artikeln avslutas med en översikt över metaforer i litteratur, naturvetenskap och matematik. Metaforer finns överallt i språket, och har stor betydelse för tankens förmåga att fånga idéerna bakom orden. De kan spela en emotiv (upplevelseskapande) roll, som är karaktäristisk i litteratur, eller en kognitiv (informationsrelaterad), som är vanligare i naturvetenskap och teknik.

I matematiken bör metaforer ha en viktig roll att spela, eftersom ämnets abstraktion gör dess idéer mindre åtkomliga än i de flesta andra ämnen. Ett syfte med artikeln är att visa att även i matematik kan metaforer kan vara kraftfulla för att inte säga nödvändiga för memorering och för att uppfatta sammanhang. Vi berör också globala matematiska metaforer och platonismen som en sådan.

Beteckningar för kedjor av upprepad derivering

Deriverar vi ett polynom får vi ett nytt polynom av lägre grad, speciellt gäller detta funktionen x^n. Vi är här mindre intresserade av konstanterna som uppträder, så låt oss införa en beteckning som är oberoende av dem. Säg att f(x) ~ g(x) betyder att f(x) = *a*g(x) för något tal *a* som inte är noll.

Om vi betecknar derivering med D kan vi skriva $Dx^5 = 5x^4$ något kortare som $Dx^5 \sim x^4$. Med detta skrivsätt behöver vi inte störas av onödig information – onödig för vad vi undersöker.

Således vet vi att $Dx^a \sim x^{a-1}$ om a inte är noll. Låt oss nu skriva $Dx^a \sim x^{a-1}$ ännu kortare som $x^a » x^{a-1}$. Nu är deriveringen inbakad i symbolen ”»”. För varje derivering minskar naturligtvis gradtalet med ett. Vi har alltså kedjor som

$$\ldots\ x^{5.5} » x^{4.5} » x^{3.5} » x^{2.5} » x^{1.5} » x^{0.5} » x^{-0.5} » x^{-1.5} » x^{-2.5} » \ldots$$

Notera att detta inte hade varit så lätt att skriva med symbolen ”~”, och ännu svårare med ”=”. Vi har givetvis på samma sätt

$$\ldots\ x^{5.34} » x^{4.34} » x^{3.34} » x^{2.34} » x^{1.34} » x^{0.34} » x^{-0.66} » x^{-1.66} » x^{-2.66} » \ldots$$

eller

$$\ldots\ x^{5.9} » x^{4.9} » x^{3.9} » x^{2.9} » x^{1.9} » x^{0.9} » x^{-0.1} » x^{-1.1} » x^{-2.1} » \ldots .$$

Vi får en kedja för vilken reell exponent som helst. Varje kedja har exakt en potens i intervallet [0,1), så detta tal kan användas att namnge kedjorna. Ovan har vi med denna notation 0.5-, 0.34- och 0.9-kedjorna. Alla kedjor är oändligt långa åt båda håll, utom en: kedjan där alla exponenter är positiva heltal.

Positiva heltalskedjan

Denna kedja är

$$\ldots\ x^5 » x^4 » x^3 » x^2 » x^1 » 1 » 0,$$

ty $x^0 = 1$. Kedjan slutar på noll – derivatan av x^0 är inte x^{-1}. Detta är undantaget, här bryts symmetrin. Vid nya deriveringar stampar vi på samma plats, vi stannar på 0. Den positiva heltalskedjan är oändlig bara åt ett håll – den är halvoändlig.

Observera att 0 inte är någon potensfunktion (x^a för något reellt tal *a*). Men 0 är ett polynom, det s.k. nollpolynomet. Det är en ”bad boy” bland polynomen genom att det är det enda polynomet som saknar gradtal. En eventuell tilldelning av ett gradtal till detta polynom kräver undantag, det kan inte göras naturligt. När vi deriverar x^5 får vi $5x^4$, och när vi deriverar 1 får vi 0. Om vi ska följa regeln att gradtalet minskar med ett vid derivering kräver att gradtalet för nollpolynomet är –1. Men då är derivatan av det enda –1-gradspolynomet inte grad –2, utan detsamma, –1, så det går inte ihop riktigt bra ändå.

Gradtalet för ett polynom är definitionsmässigt potensen för en av de termer som har koefficient skild från noll – den högsta av dessa potenser. Men nollpolynomet har ingen koefficient skild från noll. I litteraturen kan man se tre möjliga definitioner. Att gradtalet är – 1, – ∞, eller inte definierat alls. Nollpolynomet förblir ett specialfall.

Vid deriveringen 1 » 0 lämnar vi alltså potensfunktionerna.

Om vi integrerar går vi baklänges i kedjorna. Men när vi gör det får vi varje gång med en okänd konstant, som vid nästa integration ger en faktor x, och nästa gång en faktor x^2, osv. På detta vis spelar funktionerna i 0-kedjan en generell roll, ty de framträder vid upprepad integration av vilken funktion som helst. Till exempel (när vi integrerar använder vi givetvis ”«” i stället för »):

$\cos x$ « $\sin x + C$ « $-\cos x + Cx + D$ « $-\sin x + Cx^2/2 + Dx + E$ « $\cos x + Cx^3/6 + Dx^2/2 + Ex + F$ …

Detta förhållande beror naturligtvis på att derivering och integration är linjär, och vi kan alltid skriva + 0 till vilken funktion som helst. Upprepad integration ger då från denna nolla kedjan 0 « 1« x « x^2 « …

Negativa heltalskedjan

Vi har också en kedja

x^{-1} » x^{-2} » x^{-3} » x^{-4} » x^{-5} » … .

Är denna också halvoändlig, eller kan den fortsättas år vänster? Nej, den är ”heloändlig”, men dess fortsättning är inte potensfunktioner. Det är elementärt att

$\ln |x|$ » x^{-1} » x^{-2} » …

för derivatan av $\ln |x|$ är x^{-1}. Man kan också beräkna att $\int \ln|x|\, dx = x(\ln|x| - 1) + C$ med partialintegration, och ytterligare integrationer, som ger till exempel (vi sätter här integrationskonstanterna till noll)

$x^3(6\ln |x| - 11)$ » $x^2(2\ln |x| - 3)$ » $x(\ln |x| - 1)$ » $\ln |x|$ » x^{-1} » … ,

Det visar sig (se bevis nedan) att n + 1 integrationer av x^{-1} ger funktionen $x^n(\ln |x| - H_n)/n!$, dvs

$D^{n+1}\,[x^n(\ln |x| - H_n)/n!] = x^{-1}$,

där n = 0, 1, 2, ... Här är H_n de n första termerna i den harmoniska serien: $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$. Således är $H_0 = 0$. Funktionerna $x^n(\ln |x| - H_n)/n!$ har tydligen ett släktskap med potensfunktionerna x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, … på detta sätt – genom upprepad derivering.

Vi fick oändliga deriveringskedjor av potensfunktioner, med två undantag. En enda är halvoändlig, och slutar efter potensen 0 (funktionen 1) med en ögla vid funktionen 0, eftersom derivatan av 0 är 0. Det är inte en potensfunktion. Den andra är oändlig och övergår vid upprepad derivering vid potensen –1 till en annan typ av funktion, nämligen funktionerna $x^n(\ln |x| - H_n)/n!$.

Matematisk sammanfattning

Det kan vara praktiskt med en notation för funktionerna $x^n(\ln |x| - H_n)/n!$. Som en generalisering av $\ln|x|$ kan vi använda bokstaven L:

Definition: $L_n(x) = x^n(\ln |x| - H_n)/n!$.

Med denna notation är n i $L_n(x)$ gradtalet för den potensfunktion x^n som är en faktor i $L_n(x)$. T.ex., $L_0(x) = \ln|x|$, $L_1(x) = x(\ln|x| - 1)$. Dessa funktioner har således följande egenskap:

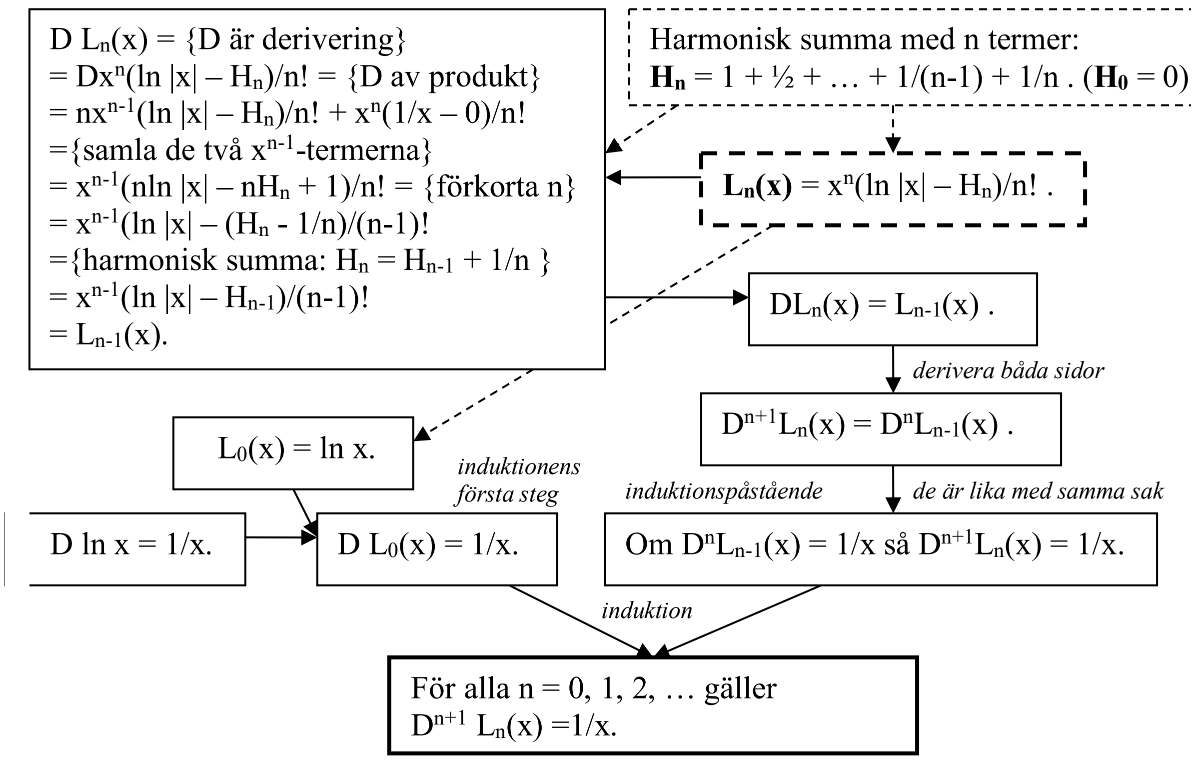
Sats: Om : $L_n(x) = x^n(\ln |x| - H_n)/n!$ så gäller för alla n = 0, 1, 2,… att $D^{n+1} L_n(x) = x^{-1}$.

Bevis: Vi besvisar påståendet med induktion. Vi presenterar beviset som en logisk graf (se [2] eller [3]). I en sådan gäller följande beteckningar.

I en ruta med heldragen ram står (minst) ett påstående. En heldragen pil mellan påståenden är en implikation: om det första gäller så gäller även det senare påståendet. Om det finns en pil från ruta A till ruta C *och* från ruta B till ruta C så gäller C om *både* A och B gäller.

I en ruta med streckad ram finns inget påstående, där introduceras en beteckning. Den nya beteckningen (eller ordet) står i fetstil. En streckad pil anger ett samband mellan beteckningar på så sätt att i den senare rutan används en beteckning som definieras i den förra (en s.k. konstruktion).

Rutor i fetstil är förutsättning respektive slutsats i satsen. Rutor som saknar en sida är viktiga tidigare välkända påståenden eller definitioner som behövs i beviset – de ”kommer in” utifrån.



Figur 2 Logisk graf för bevis av satsen.

Annorlunda uttryckt är $L_n(x)$ partikulärlösning till differentialekvationen $y^{(n+1)} = x^{-1}$. Homogenlösningen till denna differentialekvation består av en linjärkombination av de n första funktionerna i den positiva heltalskedjan.

Metaforisk sammanfattning

I detta avsnitt beskrivs Figur 1. Upprepad derivering av potensfunktioner kan metaforiskt ses som ett oändligt långt draperi av bredd en meter. Höjden i draperiet anger gradtalet. Varje deriveringskedja är en vertikal tråd som placeras i intervallet [0,1) efter vilken decimal potensen har för positiva exponenter. Tråden har knutar på avstånd ett från varandra, och varje knut representerar en potensfunktion i kedjan. Knutar i angränsande trådar bildar därmed diagonallinjer med 45° lutning. Trådarna hänger lika tätt som de reella talen i [0,1). Vid derivering går vi nedåt från en knut till nästa, vid integration uppåt till nästa knut.

På höger sida finns det ingen kanttråd, ty varje tråd svarar mot ett tal x: $0 \leq x < 1$. Alla är oändliga uppåt och neråt, utom kanttråden till vänster som är delad i två delar. Från $x^0 = 1$ lämnar dett draperien och sticker av till 0, som inte är en potensfunktion. Här återkommer man till 0 vid förnyad derivering, så tråden går tillbaka till nollknuten i en ögla. Detta är slutpunkten för den tråd som svarar mot exponenter som är positiva heltal. Den nedre tråden längs till vänster svarar mot negativa heltal. Den är oändlig, ty vid x^{-1} övergår den till funktioner som inte är potensfunktioner. Funktionerna L_0, L_1, L_2, …, ”ersätter” x^0, x^1, x^2, …

Vid de tre deriveringarna Dx = 1, D1 = 0 och D0 = 0 har vi likhet, ”=”, och inte bara ” ~”. Detta starkare samband kan representeras med att dessa trådstycken är av kraftigare tjocklek.

Kedjor av trigonometriska funktioner och exponentialfunktioner

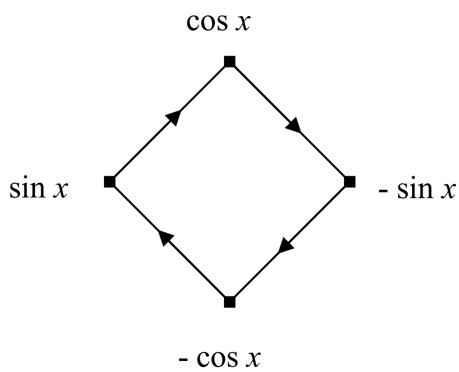
Kan motsvarande göras för andra typer av funktioner? Ja, om vi exempelvis deriverar de trigonometriska funktionerna sinx och cosx får vi en sluten kedja, som i grafteori kallas en cykel. Vi får kedjan

sinx » cosx » –sinx » –cosx » sinx

och vi är tillbaka igen. Det är en cykel av längd 4. Detta är en cykel där vi dessutom har likheter. Denna cykel utgör en mycket enkel minnesregel, som flera gånger har fått studenter att utbrista ”Varför har vi inte sett detta förut?”. Även

sin2x » cos2x » –sin2x » –cos2x » sin2x

är en cykel, men inte med ”=”, utan med ”~”. Upprepad derivering av tanx och andra trigonometriska funktioner tycks inte ge särskilt enkla mönster.



Figur 3 Cykel som illustrerar derivering av trigonometriska funktioner.

Derivering av en exponentialfunktion ax har samma egenskap som derivering av 0, ty a^x » a^x just som 0 » 0. Släktskapet mellan 0 och e^x har att göra med att de båda ingår i lösningsskaran till den differentialekvation som representerar att funktionen är oförändrad vid derivering, nämligen y’ = y. Den har lösningarna $y = Ce^x$, där C är en godtycklig konstant, och funktionen 0 svarar mot C = 0 medan e^x svarar mot C = 1. För en generell exponentialfunktion har vi ju som bekant att $Da^x = \ln a\ a^x$, vilket betyder att $Da^x \sim a^x$.

De hyperboliska funktionerna $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ och $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ kan betraktas som ett mellanting mellan trigonometriska funktioner och exponentialfunktioner. De bildar en cykel av längd 2:

sinhx » coshx » sinhx.

Öppet problem: Man kan fråga sig: finns det cykler av vilken längd som helst? Finns det för vilket n som helst någon reell lösning till $D^n y \sim y$ som *inte* är lösning till $D^k y \sim y$ för något $k < n$? Man kan börja undersöka detta genom att studera specialfallet $n = 3$, och lösa den karaktäristiska ekvationen till $D^3 y = y$.

Matematisk bakgrund

Att x^{-1} är en så speciell potens är ganska djupt i matematiken. Detta är relaterat till residukalkyl, som bygger på att integration i komplexa talplanet av x^a, där a är ett heltal, i en sluten kurva runt origo ger resultatet noll utom just om $a = -1$ (med en speciell men naturlig typ av komplex integral). Detta ligger till grund för Cauchys formel i komplexanalys. En annan egenskap funktionen x^{-1} har är att den invers till sig själv. De enda potensfunktioner x^a som är inverser till sig själva är som bekant x^1 (identiteten) och x^{-1}.

Resonemanget kan matematiseras genom att definiera en ekvivalensrelation mellan oändligt deriverbara funktioner så att f(x) och g(x) är relaterade om det finns heltal i och j så att $D^i f(x) \sim D^j g(x)$. Negativa heltal svarar här mot integration där alla uppkomna integrationskonstanter sätts till noll, och D^0 gör ingenting, alltså $D^0 f(x) = f(x)$. Då utgör varje sammanhängande tråd i draperiet en ekvivalensklass. De två halva trådarna svarande mot heltal är två skilda ekvivalensklasser.

Det är möjligt att definiera andra släktskap med hjälp av andra ekvivalensrelationer. En möjlighet är translation och dilation. Då är f(x) och g(x) relaterade om det finns reella tal a och b, $a \neq 0$, så att $f(x) = g(ax + b)$. Funktionerna cos x och sin x är relaterade på detta sätt, men de är inte relaterade med t.ex. tan x med denna ekvivalensrelation. Med en uppsättning kanoniska ekvivalensrelationer kan närhet i släktskap mellan två funktioner definieras genom antalet ekvivalensrelationer som måste ”passeras” för att ta sig från en funktion till en annan.

Metaforer i litteratur, naturvetenskap och teknik

Metaforerna är en stor och viktig del av språket. Det räcker med att slå upp en ordbok för att konstatera att varje vanligt ord på svenska utöver sina primära betydelser har ett antal olika överförda betydelser. Boken *Metaforernas mönster* av Mall Stålhammar [9] ger en översiktlig presentation av metaforernas användning i litteratur, ekonomi, politik, naturvetenskap och teknik. Grundbegreppen definieras här på följande sätt. En **metafor** är överförd betydelse (”trafikinfarkt”), medan en **liknelse** markerar jämförelsen (”trafikstockning som en hjärtinfarkt”). En **metonymi** föreligger om en egenskap eller företeelse representerar något annat (”ta ett glas”). Ett specialfall av en metonymi är en **synekdot**, där en del av något representerar helheten (”fjärden är full av segel”). En **analogi** är ett system av flera samverkande metaforer, varför draperiet av upprepad derivering är kanske mera en analogi än en metafor. En **död metafor** har blivit så inlemmad i språket att den inte längre uppfattas som en metafor. Därmed kan både ”överföra” och ”inlemma” ses som döda metaforer, om ”föra” i ursprunglig betydelse är flyttande av föremål, och ”inlemma” syftar på kroppens ”lemmar”, att göra till en del av kroppen.

Aristoteles verk *Om diktkonsten och retoriken* är enligt [9] metaforforskningens startpunkt. Aristoteles ser det metaforiska upptäckandet av likheter mellan skilda sammanhang som tecken på en medfödd begåvning, och som det främsta bland olika typer av uttryck.

De litterära metaforerna har historiskt fått mest uppmärksamhet. De är oftast emotiva, upplevelseskapande, och individuella – karaktäristiska för en författare. I naturvetenskap och teknik används huvudsakligen kognitiva metaforer, vilka är informationsrelaterade. De är i mindre grad individuella, utan tvärtom gemensamma för användarna.

En modern bil består av hundratusentals delar, där varje del behöver ett distinkt namn för att producenterna ska kunna samverka effektivt. Vid produktion av en ny bilmodell kan inte alla gamla namn överföras, varför en ofta avsevärd nyproduktion av namn krävs. Detta sker enklast på metaforisk väg. Grundregeln för tekniska metaforer är att de är vanligast när behovet är störst – när nya maskiner ska introduceras eller när ny kunskap ska spridas. Detta understryker metaforernas roll att göra nyheter lättåtkomliga för oinvigda, vilket är en ganska renodlat pedagogisk roll.

Likväl som metaforer är viktiga för att levandegöra och synliggöra samband, kan de leda vilse och fel, eftersom de alltid har ett visst avstånd till vad de primärt beskriver. De kan övertolkas, och de ger bara en viss aspekt av det beskrivna, de ger bara belysning från en viss speciell synvinkel. Metaforer är metaforer.

Metaforer i matematik

Metaforer finns i matematik på alla nivåer. Den matematiska terminologin lånar regelmässigt terminologi från allmänspråket, och specificerar betydelsen till en ny något annorlunda men strikt matematisk betydelse. ”Funktion” är ett av matematikens mest fundamentala begrepp, definierad som ingenting annat än en regel mellan två mängder som avbildar varje element i den första på ett element i den andra. Då måste det gälla att varje element i den första avbildas på ett enda specifikt element i den andra. Det tillåter att alla element avbildas på samma element i den andra – en sådan funktion är en s.k. konstant funktion. Denna matematiska mening är inte densamma som allmänspråkets betydelse av ”funktion”, dock besläktad med denna.

Exempel på andra ord som lånats in till matematiken med liknande betydelse är ”avbildning”, ”träd”, ”spegling” och ”matris”. Metaforer är också vanliga i forskningsmatematik. Här finns ”koronasatsen”, som syftar på solens korona, och ”monstergruppen”, så kallad för sin monstruöst komplexa struktur. I matematiska texter används givetvis också metaforer som inte är en del av terminologin, som ”släktskap” i texten ovan för en relation mellan funktioner. En känd metafor för induktionsbevis är fallande dominobrickor. Att en bricka faller representerar att vi vet att motsvarande påstående gäller. Den är träffande, ty villkoren är analoga (se induktionsbevis i Figur 2):

1. Den första brickan måste falla (Ex.: $D\,L_0(x) = 1/x$).
2. Om någon faller så ska även nästa falla (Ex.: Om $D^nL_{n-1}(x) = 1/x$ så $D^{n+1}L_n(x) = 1/x$.).
3. Då faller alla (Ex.: För alla n = 0, 1, 2,… gäller $D^{n+1}\,L_n(x) =1/x$).

Metaforer i matematikdidaktik

Ordet ”metafor” används i matematikdidaktik inte så mycket som ett sätt att beskriva ord och språk, utan mera som ett arbetssätt för att erövra förståelse av ämnet. Detta gäller draperiet i denna artikel. Metaforer finns på skilda matematiska nivåer. Många texter om metaforer och matematik handlar om undervisnings- eller upptäckarsituationen, med metaforer som ”äventyr”, ”spel”, ”pussel”, och beskriver egentligen inte matematiken alls. I [8] beskrivs olika modeller av matematiskt lärande i metaforisk form. De metaforer som används här, ”lärande-som-tillägnande” och ”lärande-som-deltagande”, bestäms till en del av matematikämnets specifika egenskaper. I [7] diskuteras exempel i aritmetik, algebra och analys. Slutsatsen är här att analogi och metafor är lika centrala för att uttrycka matematisk mening som de är för att uttrycka mening i naturligt språk. I boken *Math is Language Too* [10] beskrivs de matematiska metaforer barn skapar i sina berättelser om matematiken. Här handlar metaforerna om specifika matematiska objekt. Frågorna granskas från många synvinklar i antologin *Mathematical reasoning – analogies, metaphors and images* [1].

Globala metaforer i matematik

Ett exempel på en global matematisk metafor med stark matematikdidaktisk karaktär är en matematikkarta (se [5] och [6]). En sådan ser ut som en vanlig karta med sjöar, berg och städer, men alla namn på kartan är matematikord eller symboler. En grupp elever/studenter designar kartan så att det viktigaste i den matematik de känner till finns med. Geografin utformas av gruppen så att den beskriver/antyder hur begreppen är relaterade. Här finns mycket frihet, inom vilken eleverna kan formulera och extrahera sin matematikuppfattning. Matematikkartor kan ses som ett verktyg för dialog i grupp om matematiska samband. En karta för universitetsmatematik finns i [4]. Den är global på sät sätt att den är en representation av en matematisk helhet. Den handlar om hur begrepp samverkar, på grund av deras betydelser.

Den äldsta och mest fundamentala matematiska metaforen, fortfarande starkt levande, får väl sägas vara platonismen. Bilden av matematiken som existerande oberoende av människorna, någonstans, alltid oförändrad. En väv av sanningar, åtkomlig endast på indirekta sätt.

Det är en metafor som får stark näring av den matematiska verksamhetens karaktär. Vi tycker oss upptäcka objektiva sanningar. Som människor får vi kämpa för att se vad som är sant och inte sant – så är matematikverksamheten i normalfallet (om det inte gäller något redan känt). Detta kontrasterar mot den obönhörlighet och tydlighet med vilken matematiska påståenden gäller. Sanningarna tycks finnas där, ständigt, vi har bara svårigheter i att se dem. Dess tydlighet gör att de än mer framstår som oberoende av oss, som liggande utanför oss och vår osäkerhet.

Men det finns alternativa förklaringar till denna upplevelse av objektivitet, som kan baseras på observationer av hur matematiken fungerar för människor. Våra svårigheter kan förklaras med att begreppen såväl som sättet att skriva formler är långt från våra vardagliga väl intränade tänkesätt. Den objektiva karaktären kan också ha sin bas i att de grundläggande begreppen kan specificieras så tydligt att människor är överens, även människor från skilda kulturer och med starkt olika synsätt i andra frågor. De är abstrakta, och kräver ett axiomatiskt arbete, men ändå i grunden enkla – den markanta frånvaron av oenighet kan tolkas så. Vi är påfallande överens om vad som gäller i matematiken, t.o.m. över kulturgränserna. Denna bokstavliga och fullständiga enighet är ytterst säregen. Den kan ge matematiken ett skimmer av en utommänsklig, platonsk existens.

Referenser

[1] English, D. (red). (1997) *Mathematical reasoning – analogies, metaphors and images*, Lawrence Erlbaum Assoc. Publ.
[2] Lennerstad, H. (1996) Logiska grafer – att kartlägga matematik, *Normat*, Hefte 3.
[3] Lennerstad, H. (1996) Logical graphs – how to map mathematics, *Zentralblatt für Didaktik der Matematik* 96/3.
[4] Lennerstad, H. (2002): *Envariabelanalys med dialoger*. Ramdala: Förlaget Kärret.
[5] Lennerstad, H., Larsson, K. (2003): Matematikkartor, *Nämnaren*, 30 (3), s 22–27.
[6] Lennerstad H., Selander, M. (2004): Klass 9A:s matematikkarta, *Nämnaren*, 31(2), s 24–29.
[7] Pimm, D. (1981) Metaphor and Analogy in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1 No 3, pp. 47-50.
[8] Sfard A. (2001) There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning, *Educational Studies of Mathematics*, vol 46, No 1-3, pp.13-57.
[9] Stålhammar, M. (1997) *Metaforernas mönster i fackspråk och allmänspråk,* Carlsson Bokförlag, ISBN 91 7203 220 0.

[10] Whitin, Ph., Whitin, D. J. (2000) *Math is Language too – Talking and Writing in the Mathematics Classroom,* National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA ISBN -0-8141-2134-9.