

Hitta de superrika talen

Tal kan inte bara vara jämna, udda, positiva eller negativa. De kan även vara perfekta, fattiga eller rika. Vi får här gå på upptäcksfärd bland de superrika talen. Vad utmärker dessa, hur många är de och hur finner man dem?

V arje positivt heltal $1, 2, 3, \dots$ har något tal som det är jämnt delbart med, i alla fall 1 och talet självt. Primtalen är sämst på denna gren, de delas bara av dessa två. Alla andra tal delas av något mer tal. Talet 4, exempelvis, är inte primtal och delas av 1, 2 och 4. Ett sätt att mäta hur delbart ett tal är att lägga ihop alla tal som delar det, och som är mindre än talet självt. För alla primtal blir denna summa bara 1. För 4 är det $1 + 2 = 3$.

Vad blir denna summa för talet 6? Jo, då har vi $1 + 2 + 3$, som är 6, lika med talet självt. Då kan vi kalla 6 för ett *perfekt tal*, det har man gjort sedan Euklides *Elementa*. Under antiken kände man bara till fyra perfekta tal: 6, 28, 496 och 8128. De tal där summan av delarna är större än talet självt kallas *rika tal*. De andra är *fattiga tal*. Bengt Ulin kallar ett primtal p för utfattigt, för deras kvot är $1/p$. Då kan man säga att 1 är utblottat, som har kvoten $0/1 = 0$.

Denna artikel handlar om rika tal, väldigt rika tal. Vad får vi för summa av delare för talet 12? Jo, det blir $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$, som är större än 12. Så talet är inte perfekt utan rikt, faktiskt det första rika talet.

Ett tals *relativa rikedom* kan sägas vara kvoten mellan ovan nämnd summa och talet självt. Ett perfekt tal har då relativ rikedom 1, och de rika talen har relativ rikedom större än 1. För fattiga tal är kvoten mindre än 1 och primtalen, ja de är urfattiga.

Går man uppåt bland talen får man då och då nya rekord i relativ rikedom. Efter 1 (0) och 2 (0,5) faller kurvan vid 3 (0,33) men når en ny rekordhöjd med 4 (0,75). Nästa rekord är 6 (1,00). Detta rekord slås först vid 12 (1,33), som i sin tur slås först av 24 (1,5). Låt oss kalla ett tal vars relativa rikedom är större än alla föregående tal för ett superrikt tal. De superrika talen bildar en följd av tal, som börjar med talen 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60. De är en sorts motsats till primtalen.

Hur stor relativ rikedom kan då ett tal ha? Bengt Ulin ger i artikeln *Rika tal – och utfattiga* ett bevis för att $n!$ (n -fakultet, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) har en relativ rikedom som går mot oändligheten när n ökar. Så den relativa rikedomen är inte begränsad uppåt.

tal	faktorer	r
1	-	0
2	2	0,5
4	2^2	0,75
6	$2 \cdot 3$	1
12	$2^2 \cdot 3$	1,33...
24	$2^3 \cdot 3$	1,5
36	$2^2 \cdot 3^2$	1,53
48	$2^4 \cdot 3$	1,5833...
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	1,8

Att finna de superrika talen

Låt oss hitta en formel för den relativa rikedom. Vilken relativ rikedom har en tvåpotens? Jo, summan av delarna av 2^n är $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$, som är en geometrisk serie som blir $2^n - 1$. Dess relativa rikedom är därför

$$\frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - 2^{-n}.$$

Den kommer aldrig förbi 1. Så en tvåpotens kan inte tävla med 6, som har relativ rikedom 1. Hur är det med potenser av 3? De har en summa av delare

$$1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

så här får vi

$$r(3^n) = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} - \frac{3^{-n}}{2}$$

så de passerar aldrig 1/2. Gör vi samma sak för ett primtal p så har vi summan av delarna

$$1 + p + \dots + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

och vi får

$$r(p^n) = \frac{p^n - 1}{p^n(p - 1)} = \frac{1}{p - 1} - \frac{p^{-n}}{p - 1} < \frac{1}{p - 1}.$$

Termen $-(p^{-n}/(p-1))$ är negativ och går mot noll om n blir stort, och den relativa rikedom är störst för $p=2$. En potens av ett primtal kan inte ge ett större värde än 1. Därför är 2 och 4 de enda superrika talen som består av ett enda primtal. Alla andra slås ut av $r(6)=1$.

Två olika primtal

Låt oss nu titta på ett tal som består av två olika primtal. Låt oss säga att *antalet olika primtal* som ett tal består av är dess *typ* (detta är inte en etablerad beteckning). Vi har hittills tittat på alla tal av typ 1, nu är det dags för talen av typ 2.

Låt oss titta på $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Om vi tillfälligt tar med 24, som ju också är delare, är summan av delarna $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24$. Samla nu de tal som är delbara med 3 sist: $1 + 2 + 4 + 8 + 3 + 6 + 12 + 24 = 1 + 2 + 4 + 8 + 3(1 + 2 + 4 + 8) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3)$. Detta är en produkt av två geometriska serier, där den andra är $3^0 + 3^1 = (3^2 - 1)/2$. Det ger relativ rikedom

$$r(24) = \frac{(2^4 - 1)(9 - 1)}{2^3 \cdot 3 \cdot 2} - 1.$$

Den sista -1:an beror på att vi tagit bort 24 igen, som ju inte skulle vara med. Samma sak kan vi göra om vi har n 2:or och m 3:or, dvs för talet $2^n 3^m$. Det ger

$$r(2^n 3^m) = \frac{(2^{n+1} - 1)(3^{m+1} - 1)}{2^n 3^m 2} - 1.$$

Vi kan göra samma kalkyl för två andra primtal p och q . Det ger

$$r(p^n q^m) = \frac{(p^{n+1} - 1)(q^{m+1} - 1)}{(p - 1)p^n q^m (q - 1)} - 1.$$

Här kan vi dividera med p^n och med q^m . Det ger

$$r(p^n q^m) = \frac{(p - p^{-n})(q - q^{-m})}{(p - 1)(q - 1)} - 1.$$

Här har vi en formel för den relativa rikedom för ett tal som består av två olika primtal. Talet $r(p^n q^m)$ ökar om vi ökar n eller m . Och det blir aldrig större än

$$r(p^n q^m) < \frac{pq}{(p - 1)(q - 1)} - 1$$

som är störst för $p=2$ och $q=3$. Då är det $6/2 - 1 = 2$. Alla tal som består av två primtal, av typ 2, har därför mindre relativ rikedom än 2.

Tre olika primtal

Har vi tre primtal p , q och t får vi bara ännu en geometrisk serie som ovan, och ännu en faktor

$$\frac{t - t^{-k}}{t - 1} \quad \text{som ger formeln} \quad r(p^n q^m t^k) = \frac{(p - p^{-n})(q - q^{-m})(t - t^{-k})}{(p - 1)(q - 1)(t - 1)} - 1$$

för typ 3. Om n , m och k går mot oändligheten får vi begränsningen

$$r(p^n q^m t^k) < \frac{pqt}{(p - 1)(q - 1)(t - 1)} - 1$$

för alla tal av typ 3, som är som störst då $p=2$, $q=3$ och $t=5$. Det ger $30/8 - 1 = 2,75$. Vi har $r(30) = 1,4$, men 30 är redan utkonkurrerat av 24, som har $r(24) = 1,5$.

Så relativa rikedom för ett tal är begränsad av *antalet olika primtal* som det består av. Så vi måste öka antalet olika primtal för att nå riktigt hög relativ rikedom. Det tycks också som det behövs många små primtal för att få hög relativ rikedom. Faktum är att Alaoglu och Erdős har bevisat att i ett superrikt tal kan inte ett större primtal förekomma i fler exemplar (ha högre potens) än ett mindre.

typ	gräns
1	1
2	2
3	2,75
4	3,21
5	3,81
6	4,21

Är $n!$ superrikt för alla n ?

Fakultetsfunktionen $n!$ får med det ena primtalet efter det andra, och har ett starkt överskott av små primtal. Den har de första värdena 1, 2, 6, 24 (de är 1 , $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$). Alla dessa är ju superrika. Hur är det med nästa, $120 = 5!$ och de följande? Är alla fakultetstal superrika? Svaret är nej. Alla de första från $1!$ (som är 1) upp till $7!$ (som är 5040) visar sig vara det, men $8!$ (som är 40320) är inte superrikt. Det förlorar mot talet 27720, för vi har $r(8!) = 2,946$, men $r(27720) = 3,052$. Om vi vill jämföra deras primtalsfaktoriseringar så är $8! = 40320 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, medan $27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Talet 27720 är alltså av typ 5, men ändå under gränsen för typ 4. Allt detta kan man ta reda på med hjälp av formeln ovan och nätuppslagsverket över heltalsföljder (oeis.org).

LITTERATUR

- Alaoglu, L. & Erdős, P. (1944). On highly composite and similar numbers. *Transactions of the american mathematical society* 56 (3), 448–469.
- Claesson, P. (1979). Fattiga och rika tal. *Nämnaren* 1979:2, 29–32.
- Ramanujan, S. (1997). Highly composite numbers. *The Ramanujan journal* 1, 119–153.
- Ulin, B. (2005). Rika tal – och urfattiga. *Nämnaren* 2005:4, 36–27.
- Nätuppslagsverket över heltalsföljder oeis.org/?language=swedish