# Matematiska och svenska

*Är inte matematikens formler ett språk egentligen? Det är ju olika symboler som följer vissa regler. Har man inte ett visst alfabet, och en grammatik? Finns det också en semantik?*

Jo, detta är sant, som vi snart ska se. Men detta språk fungerar ganska annorlunda än naturliga språk, som kan vara en bakgrund till att många språkmänniskor inte skulle kalla sig matematikmänniskor. Vi kommer att titta på likheter, och skillnader. Ändå kan man alltid översätta mellan matematiska och svenska.

För låt oss kalla symbolspråket för **matematiska**. Med det menar vi inte specialord som ”kvot”, ”addition”, ”decimalkomma”, ”likhetstecken”. De är en del av **matematikens fackspråk**, som lyder under svenskans grammatik. Detta fackspråk kan skilja sig på ett lömskt sätt från normalsvenskan. Här är några exempel:

| *Ord* | *normalspråklig* | *matematiskt fackspråklig* |
|---|---|---|
| Tal | middagsföreläsning | numerisk storhet |
| Rot | växtdel | lösning till ekvation |
| Lösning | vätskeblandning | svar eller beräkning (olika betydelser!) |
| Volym | ljudstyrka | tredimensionellt utrymme |
| Förlänga | göra någonting längre | multiplicera nämnare och täljare med ett tal |

Åter till matematiskan! Det är en term som skulle behövas på våra mobiltelefoner när vi väljer språk. Här finns ”svenska”, turkiska”, ”franska”, osv., men när det gäller siffror så står där bara ”1 2 3 …”. Ett tecken på matematiskans osynlighet – språket som saknar vedertaget namn.

De arabiska siffrorna, som egentligen är indiska men vidarebefordrades till Europa av araber, är urgamla. Det övriga symbolspråket började växa fram på 1500-talet som förkortningar av ord, det är alltså inte så gammalt. Exempelvis introducerade engelsmannen Robert Recorde likhetstecknet ”=” 1557 i sin bok *The Whetstone of Witte*, med motiveringen att ”ingenting kan vara mera lika än två räta linjer som är parallella och dessutom lika långa”. Det tog ytterligare bortåt hundra år innan tecknet var allmänt använt och accepterat.
Recordes språkliga uppfinning tilldelades t.o.m. i mitten på 1900-talet en egen plats på skrivmaskinernas tangentbord, och därmed senare på datorernas. Ett par andra exempel är ”<” för ”mindre än”, ”%” för ”hundradel”, och givetvis plustecknet (som funnit en ny betydelse för åldrar, som ”30+”).

Innan den gode Robert skrev man ”eq.” som förkortning av ”equal”, och alla andra symboler vi idag är vana skrev man ut som ord. Då gällde **retorisk matematik**, dvs matematik utan symboler (annat än siffrorna). Eftersom tecknen uppstått som översättningar är det klart att man kan översätta tillbaka! Det kan vara bra för förståelsen.

## Alfabetet: vilka tecken?

Till en början tränar elever från första klass rätt användning av de tolv symbolerna =, +, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. När ett likhetstecken är med är det ett påstående, som att ”2 + 3 = 5” är sant medan ”2 + 7 = 4” är falskt. Ett uttryck som ”4 +11” är förstås inget påstående. Det är ett numeriskt storhet som kortast kan skrivas som ”15”, men också på andra sätt.

Men vad *betyder* ”2 + 3”? Det betyder antalet av två föremål tillsammans med tre föremål, där ”föremål” kan vara vadsomhelst. Betydelsen är mindre konkret, men gäller å andra sidan i oerhört många olika sammanhang. Detta är förstås en stor poäng med matematik.

Idén om matematik föddes nog när någon slogs av att räknandet fungerar på samma sätt antingen man räknar ägg, får, stenar, träd, människor, eller stjärnor, till exempel. På 1500-talet märkte man att med särskilda symboler kunde man lättare uttrycka sig och se samband, förutsatt att man blivit tillräckligt van vid symbolerna. Symboliseringen av retorisk matematik var igång.

**Mera symboler**
Senare möter eleverna ”< ” för ”är mindre än”. När man skriver ”3 < 5” måste man komma ihåg att tecknets *smala* sida ska vara mot det *mindre* talet, liksom för ”>” med betydelsen ”större än”. Just som med likhetstecknet antyds symbolens betydelse i dess grafiska design.

**Har matematiskan verb, substantiv, pronomen, adjektiv?**
Sedd som kortversion av naturligt språk är det inte så svårt att urskilja verb i matematiskan. Likhetsecknet ”=”  är ju ett ”är”, och borde vara ett verb i matematiskan, liksom”>” och ”<”. Det gäller också ”tillhör”, skrivet ”∈” (Ex.: ”järn *tillhör* gruppen metaller”) och ”är delmängd av”, skrivet ”⊂” (”köpenhamnarna *är en delmängd av* danskarna”). När ett verb finns med har vi ett påstående, som normalt är sant eller falskt.
Samma sak gäller på matematiska. Vi vill kanske gärna veta för vilka x som påståendet ”$x^2 – x – 2 = 0$ ” är sant. Det kallas att lösa en ekvation. Det kan jämföras med påståendet ”Någon gick in på banken klockan 11.” Vem är någon?

Detta leder till nästa fråga. Vi har alltså flera verb i matematiskan, men har vi även substantiv och pronomen? Låt oss börja med ”räkneord”, som i svenska är en särskild ordklass. Jag vill dock hävda att räkneorden i matematiska snarare spelar rollen av substantiv, genom att ”5” kan ses som en förkortning av ”5 objekt” (vilka som helst), och man släpper ”objekt” för det är onödigt att släpa med. Jag menar att i matematik ”5” är en förkortning av ”5 objekt”, och det senare är ett substantiv i plural. Därför kan man i matematiskan se ”5” som ett substantiv.

Man kan också säga att x och andra variabler är en form av pronomen – ersättningstecken för tal/substantiv. Vad är x? Är det 5 eller7? Vem är ”någon”? Är det fru Nilsson eller herr Oleander? Bokstaven x ersätter ett tal, mer eller mindre känt, liksom ett pronomen ersätter en person, mer eller mindre känd.

Adjektiv beskriver egenskaper, och de är inte så vanliga som ord i matematiska, däremot, förstås, som begrepp. Det beskrivs nästan alltid i termer av att tillhöra en mängd med egenskapen. Ett exempel:”17 är ett udda tal” skrivs som ”17 tillhör mängden av udda tal”, fast det förstås skrivs på matematiska på följande sätt: ”$17 \in \{2x + 1, x \in \mathbf{Z}\}$” (direktöversatt: ”17 tillhör mängden av talen 2x + 1 där x tillhör de hela talen”).

**Synonymer**
En likhet mellan matematiska och svenska är att båda språken har massvis av synonymer. Det är ord som betyder ungefär samma sak, som ”färg”, ”kulör” och ”ljusvåglängd”, där ”kulör” har mer estetisk tyngdpunkt och ”ljusvåglängd” mer fysikalisk. Dessa tre synonymer har lite olika valör, och passar kanske i något olika sammanhang. Talen ”½”, ”30/60” och ”0,5” har samma värde, och det är *värdet* som en likhet säger något om. Ingenting annat. Därför kan man kalla ”½”, ”30/60” och ”0,5” synonymer i matematiskan, och det finns mängder! Jag har haft en diskussion med en matematikdidaktiker som menade att ”30/60” är en operation och inte ett tal. Jag tycker det är en för snäv synpunkt. Jag menar att ”30/60” är en operation men också ett tal, med mer betoning på operationen än när man skriver talet som ”0,5”. Det finns fler synonymer för 0,5, till exempel $2^{-1}$ och 50%. Jag har haft en annan diskussion med en annan matematikdidaktiker som menade att 50% inte är ett tal utan en andel, det blir ett tal först när man tar 50% av något. Det anser jag också är för snävt. Precis som ordet ”bil” kan ha många betydelser: transportmedel, konstruktion av metall, gummi och plast, statussymbol, fritidsintresse, utgiftspost i ekonomin, marknadsföringsprodukt, rum för samtal… Det behöver inte vara antingen eller. Kunskap är just att förstå nyanserna i och balanserna mellan de olika betydelserna. Alla andra betydelser finns i bakgrunden, men plötsligt kan de bli aktuella, beroende på vart resonemanget/kalkylen leder.
Det finns många synonymer. Multiplikation kan betecknas med ”·”, ”*” och ”x”, samt med ingenting, genom att 2x betyder 2·x. Det finns också flera synonymer för division.

**Dubbelbetydelser**
Matematiska har liksom svenska inte bara synonymer utan även dubbelbetydelser (homonymer). En sådan är att tankstrecket ”–” både är minustecken och bråkstreck – de ser i alla fall likadana ut. Dessutom har tecknet olika betydelse i ”5 – 3” och i ” – 3”. I den förstnämnda är det en subtraktion, i det andra är det en del av symbolen för ”minus tre”, man gör knappast någon subtraktion här. Man kan tänka sig denna notation som en förkortning av ”0 – 3”.

En annan dubbelbetydelse är parenteserna ”(” och ”)”. En funktion som beror på en variabel x brukar betecknas med f(x). Ett exempel: x kan vara årtal och f(x) jordens befolkning. Det betyder att f(2016) = 7 miljarder. Det olyckliga är att samma parenteser används i beteckningen ”f(x)” som i produkten 2· (3 + 4) ovan, där man kan multiplicera in, för 2· (3 + 4) = 2· 3 + 2· 4. Men parentesen i f(x) kan man inte multipliceras in i, ty 2f(2016) är dubbla jordens befolkning, men f(2·2016) är jordens befolkning år 4032, vilket inte alls behöver vara 14 miljarder. I matematiska används samma parenteser för olika betydelser. Detta är utan tvivel orsaken till en del fel som studenter gör.

## Gemensamt för matematiska och svenska
Parenteserna är ett exempel på ett annat problem: vissa tecken är gemensamma för svenska och matematiska. Parenteserna har olyckligtvis helt olika betydelse i de två

språken. I svenska är det något som kan utelämnas, medan det i matematiska är snarare tvärtom: vad som måste räknas ut först. $2\cdot (3 + 4)$ är $2\cdot 7$ och inte $6 + 4$.

## Att bygga upp ord

Ord på svenska byggs upp genom att sätta bokstäver efter varandra, fast alla sätt har inte någon betydelse. Ett lexikon beskriver vilka som är godkända. Andra svenska ord fås som böjningar enligt vissa böjningsregler som är karaktäristiska för språket. På matematiska kan man bilda tal genom att sätta siffror efter varandra (alla tal finns i lexikonet, om det innehåller högst ett decimalkomma), men man bildar inte variabelnamn som svenska ord bildas. I ett programmeringsspråk kan en variabel heta XGAMMAL och en annan XNY, men på matematiska får det bli $x_{gammal}$ och $x_{ny}$,, eller $x_g$ och $x_n$. Bokstäverna i matematiska fungerar på ett mycket annorlunda sätt än i svenska. Inte bara genom att de inte representerar ljud utan kvantiteter, utan även i hur man bildar ”ord”.
Med funktioner finns en dialektal konstighet till. Fast en generell funktion betecknas f(x), så skrivs de flesta funktioner utan parentes. Funktioner kan t.ex. vara $x^2 + 1$, cosx, $e^x$, alltså inga parenteser någonstans. Men på datadialekt måste man skriva ut parenteserna. Då kan dessa funktioner heta square(x) + 1, cos(x) och exp(x).

Synonymernas motsvarighet för hela meningar är förstås meningar som betyder (någorlunda) samma sak. Exempelvis ”Vägen är våt.” och ”Vägen är inte torr.”, eller ”Hon heter Alfrida.” och ”Hennes namn är Alfrida.”, eller ”$x^2 = 1$” och ”$x =1$ eller $x = -1$”. De kallas i matematik *ekvivalenser*, och kan ur språklig synpunkt kallas *omskrivningar*. De är ytterst viktiga för matematik, för de flesta bevis består huvudsakligen av sådana. All matematisk kunskap vilar på bevis, vilket gör matematik till en vetenskap. En vetenskap som handlar om hur människor tänker angående om kvantiteter och mönster.

## Språkintresse och matematikintresse

Låt oss nu titta på stor skillnad på hur vi använder svenska och matematiska, som kan vara en bakgrund till att språkintresse och matematikintresse ofta inte sammanfaller. I svenska bildar vi mening efter mening när vi gör ett resonemang. I matematik gör vi samma sak när vi gör en kalkyl. Vad bestämmer nästa steg i resonemanget/kalkylen?

På svenska är det tanken på vad vi vill uttrycka, medan det i matematik är omskrivningsregler som brukar vara framgångsrika. På svenska tänker vi inte mycket på språkregler när vi talar, vi tänker på betydelserna!

Under en matematisk kalkyl försöker man använda reglerna så korrekt som möjligt, i syfte att nå en förenkling. Man tänker på reglerna, mer än på betydelserna.

En journalist utryckte det så här ”Jag tyckte matematik var svårt i skolan tills jag kom på att det bara gällde att räkna ut rätt svar. Då var det lätt.” Hon hade kanske tidigare ansträngt sig att förstå varje mening, som man gör med meningar på svenska. Men matematiska formler är mer till för att användas, än för att förstås. De är verktyg. Förståelse för verktyg växer fram *medan man använder dem, prövar dem*.

**Språkregler är intuitiva – tills man möter andra språk**

Användningen av naturliga språk är ju huvudsakligen intuitiv. Man behöver inte känna till grammatiken på sitt eget modersmål. Man behöver grammatik huvudsakligen för att lära sig främmande språk efter en viss ålder. Det är ett fantastiskt mirakel att små barn lär sig sitt modersmål helt utan grammatik. De lär sig dessutom grammatiken fullständigare, inklusive alla undantag, än vad vi gör när vi lär ett språk som vuxna. När grönländskan fick ett skriftspråk på 1700-talet formulerade man samtidigt dess grammatik. Kunskap om grammatiken är onödig om man ytterst sällan möter ett annat språk. Då kan man till och med vara omedveten om att ens språk har en grammatik.
Alltså: *Man tvingas successivt upptäcka och formulera det egna språkets grammatik när man översätter*. Handel är en av de äldsta mänskliga aktiviteterna, och den har tidigt väckt detta behov. De som kunde två språk hade en stor fördel. Då började språkvetenskap att utvecklas.

Hur är det med detta för matematiskan? Har matematiskan något konkurrerande språk, som det finns ett tvingande behov av att översätta till? Det är nästan bara konstruktörer av matematisk mjukvara som har tvingats formulera grammatiken in i minsta detalj, ty vid minsta fel fungerar inte ett datorprogram. Matematikerna klarar sig så bra utan, för oss är språket intuitivt som ett modersmål. Jag menar att denna grammatik till mycket stor är del intuitiv och oformulerad. Vilket alltså är naturligt, men kanske inte optimalt ur skolans synpunkt. För det kommer ständigt nya grupper invandrare till matematikens land, när elever kommer till skolan och studenter till högskolan. Skulle vi behöva MFI – matematiska för invandrare?

## Matematik utan matematiska

Finns matematik utan matematiska? Javisst! Exempelvis gör personer som väver tyger ibland avancerade matematiska kalkyler på sitt eget sätt, som de själva inte är benägna att kalla matematik. Men som man skulle kunna översätta till matematiska (då plötsligt kanske obegripligt för vävarna – valet av språk är alltid viktigt). Matematiskan är bara *ett uttryckssätt* för matematiskt tänkande, idag så dominerande att vi nästan tror det inte kan finnas något annat. Men ett annat är geometriska figurer som har en mycket äldre historia än matematiskan. Matematiska bevis är mycket äldre än matematiskan.

I en forskningsrapport måste man skriva sina resultat på matematiska. Det är också matematiskans stora styrka: som en *väl fungerande mötesplats för matematiskt tänkande*. Skriver alla på detta språk kan experterna förstå varandra snabbt, och missförstånd är ovanliga. Matematiskans effektivitet är en stor faktor bakom matematikforskningens snabba utveckling.

## Tre nivåer för matematisk kunskap

Slutligen vill jag beskriva tre nivåer av matematisk kunskap, med matematiskan som jämförelseobjekt. Den första nivån är matematiskans betydelser (*under matematiskan*), alltså alla tillämpningar och all geometri och så vidare som siffror och matematiska uttryck kan betyda. Den andra är matematiskans regler (*på matematiskanivå*) som vi använder när vi räknar. Den tredje är matematisk intuition (*över matematiskan*) som vi behöver för att veta hur vi ska räkna, för att kunna lösa ett problem. För denna tredje nivå är reglerna de verktyg som vi kan använda. Här är problemlösaren som en konstnär, i linje med Wittgensteins ”Det finns inga regler för hur man ska använda reglerna”. Intuition är ledande, vilket man kan se som en sorts koncentrerad erfarenhet. Intuition byggs upp av erfarenhet. Egentligen är det bara den mellersta nivån som man har lyckats programmera framgångsrikt med datorsystem.

### En formel är som en maskin – översätt!

En formel som t.ex. (x - 1)/(x + 1) är som en liten maskin, eller ett datorprogram. Den talar om exakt vad man ska göra med ett tal x. Den kan översättas till svenska, t.ex. som ”Dividera talet minskat med ett med samma tal efter du har adderat ett till det”. På svenska blir det hela klumpigare – naturligtvis – matematiska är ju specialgjort för detta ändamål. Men svenskaversionen innehåller typiskt mer mening. Modersmålet är meningsladdat. Denna laddning kan smitta av sig på matematiskan, och då har man vunnit personlig förståelse för matematiska. Man förklarar samtidigt i detalj hur en formel fungerar.

### Slutsatser

Matematiska är ett mycket effektivt språk för sitt speciella syfte. Det är huvudsakligen ett skriftspråk, men matematik kan också skrivas utan det. Matematik är inte alls så entydigt som man brukar säga, det finns gott om dubbelbetydelser och synonymer, som alla andra språk. Om man vill kan man regelmässigt översätta mellan matematiska och svenska, och då både tydliggöra hur de matematiska formlerna fungerar och ladda dem med mening.

# Del 2

Som ”4 +11” och ”2 + 3 = 5” illustrerar kan man i matematiska, liksom i svenska, uttrycka betydelser, men också påståenden om betydelser. Räknandet i skolans första klass handlar tydligen om hur man kan lägga ihop eller multiplicera tal och få något som är lika stort. Det vimlar av likhetstecken. Talet 2 + 3 är lika stort som 5, och 5 föredrar vi för det är kortare. Vi är så (mekaniskt) intränade på detta att vi kanske knappt vill acceptera 2 + 3 som ett tal, det är ju inte färdigräknat! Okej, kanske är en nyköpt platt paket från IKEA, som ska bli ett bord, ännu inget bord.

Vi kan också ha svårt att acceptera att man får ersätta 5 med 2 + 3 i en beräkning, trots att 2 + 3 har samma värde och likhet alltså borde gälla. Här är en av matematikens många friheter, som inte alltid når eleverna.

Därefter tillkommer decimalkommat ”,” (ibland decimalpunkt ”.”).

**Sant, falskt, meningslöst**

I ett språk måste man kunna uttrycka både sanna och falska påståenden. De fyra påståendena

”En groda har fyra ben.”, ”En groda har åtta ben.”, ”1 + 2 = 3”, och 1 + 2 = 4”

är alla språkligt korrekta, två är sanna och två är falska. Hur man avgör detta illustrerar en annan skillnad. För att avgöra om en groda har fyra ben eller åtta räcker det inte med språkvetenskap, vi måste konsultera biologin. Men för att avgöra om 1 + 2 är 3 eller om det är 4 kan vi stanna i matematiken. Matematiken har *egna sanningar*, vilket gör matematiken till en vetenskap. Därför kan man inte säga att matematiken *är* ett språk, snarare att den *har* ett särskilt språk!

Det hindrar inte att en fysiker kan använda matematiken enbart som ett språk: som ett sätt att uttrycka fysikaliska realiteteter som man arbetar med. Att de matematiska uttrycken stämmer avgör man med sin fysikaliska insikt, och inte med bevis. Det visar hur användbar och flexibel matematiken är. Fysikern använder då bara en del av matematiken.

**Retorisk matematik**
Det innebar en förståelsemässig skillnad, genom att man då ville förstå att varje mening/uttryck för sig är korrekt, genom att förstå vad den säger. I algebran som kom senare och nu är helt etablerad, ersätts denna förståelse mening för mening av uttalade *räkneregler* som ska uppfyllas. Man behöver då inte tolka varje mening/uttryck längre.
Vi tappar betydelse, men vi kan å andra sidan hitta ny matematik som vi vet är korrekt innan vi förstår vad den betyder! Detta är karaktäristiskt för matematik. Växelspelet mellan betydelser och språkregler förskjuts.

Språkreglerna banar vägen för nya sanningar, och därmed för ny förståelse. Men språkregler kan inte göra nånting ensamma – vad är det som leder dem i sin tur? Jo, tänkarens intuition. Symbolerna och språkreglerna är enbart verktyg. Mer om det senare.

**Matematiskan mer skriftlig än muntlig**
Men språk handlar ju i första hand om kommunikation. Är det så även med matematiska? Ja, men den är oftare skriftlig än muntlig. Det är mer än ett skriftspråk än ett talspråk, det har ju uppkommit som en stenografisk snabbskrift. Det märks tydligt om man försöker beskriva en beräkning per telefon – det är inte lätt! Man kan nog också lugnt säga att matematik läses och skrives betydligt oftare än det talas.
Detta är en uppenbar skillnad jämfört med naturliga språk, där det muntliga är primärt och det skriftliga sekundärt. Exempelvis fick grönländskan sitt skriftspråk först på 1700-talet – sin första variant. Flera tusen språk i världen saknar fortfarande skriftspråk.

Från detta att matematiskan är en kortform för naturligt språk följer att matematiskans tecken uttalas olika i olika delar av världen. Likhetstecknet ”=” uttalas på svenska oftast ”är lika med”, men på engelska ”equals”. Detta hänger samman med att tecknen inte avbildar uttal, utan betydelser. Det liknar de kinesiska tecknen som står för morfem (betydelsebärande enheter) eller ord, medan tecknen i europeiska språk står för uttal. Kinesiska tecken uttalas olika i olika delar av Kina, ibland förstår man varandra lättast genom att skriva. Som för matematiska!

Man skulle kunna kalla matematiskan ett *hjälpspråk*, i likhet med kemins symboler som $H_2O$ och $CO_2$. Det klarar sig inte utan ett naturligt språk, men uttrycker å andra sidan ofta det mest centrala innehållet. Det naturliga språket ”pekar på” det, ägnar sig till stor del åt att beskriva vad hjälpspråket säger. Matematiskan började utvecklas i England, Frankrike och Tyskland, och är bestämd av den speciella forskarkulturen under denna period, men är i dag ett i högsta grad internationellt språk. Invandrare till

Sverige har sagt att matematiskan har hjälpt dem lära sig svenska, genom att de känner igen sig i detta språk.

**Lästips:**
Flera kapitel om matematik och matematiska, och elevers matematiska förståelse, finns i *Matematik och respekt – matematikens mångfald och lyssnandets konst*, Ann-Louise Ljungblad och Håkan Lennerstad, Liber, 2012.
Sju författare beskriver matematikens språk från olika synvinklar i *Matematiska språk*, red: Håkan Lennerstad, Christer Bergsten, Santérus Förlag, 2008.

**Svar**: Av 1. $A \cup B$, 2. $x \in A$, 3. $A \subset B$ avviker 1. För det är en mängd, de två andra är påståenden. Översättning (A och B antas vara mängder): 1. Unionen av A och B (alla element som är i någon av dem), 2. x tillhör A, 3. A är en delmängd av B (alla element i A är även i B).