Håkan Lennerstad

Falta tärningarna!

Att slå en vanlig, sexsidig tärning är väl skolmatematikens allra vanligaste exempel på tillämpad sannolikhet, liksom att slå två eller tre. Om man tittar närmare på det så dyker en operation upp som är viktig i på många håll matematiken: att falta. Den gör det ganska lätt att räkna ut sannolikheterna. Men vad är då att falta?

Vill du veta hur stor chans det är att få en viss summa om du rullar några tärningar? Det är bara att falta tärningarna! Som vi ska se innebär det att lägga ihop två serier av möjligheter, där den ena först ska vändas baklänges och flyttas i sidled.

Om du rullar en vanlig tärning finns det en enda möjlighet att det blir 1. Och en enda att det blir 2. Och så vidare upp till 6. Det är noll möjligheter att det blir 7, eller större, för det finns inte på tärningen. Det är också noll möjligheter att det blir 0, –1, och så vidare. Nedanstående tabell beskriver en vanlig tärning:

en tärning	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
antal möjligheter	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0

Två tärningar

Vad händer då om vi har två tärningar? Ett sätt att se det är med en kvadrat om 6x6 rutor, där varje ruta är en möjlighet, lika sannolik som alla andra.

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1

För att få veta hur många sätt summan av prickar kan bli 5, kan vi lägga ihop ettorna diagonalt (blåskuggade rutor i tabellen). Ettorna representerar 1+4, 2+3, 3+2 och 4+1, så det finns 4 möjligheter att få summan 5. Vi kombinerar alltså resultaten 1, 2, 3 och 4 på den ena tärningen med resultaten 4, 3, 2 och 1 på den andra, så på den andra räknas talen baklänges. Låt oss nu utföra denna addition. Lägg den ena tärningens resultat baklänges och skjut den i sidled så vi får alla möjligheter att få just 5. Det ser ut så här:

första				0	1	2	3	4	5	6	7	8
tärningen				0	1	1	1	1	1	1	0	0
andra	8	7	6	5	4	3	2	1	0			
tärningen	0	0	1	1	1	1	1	1	0			
produkter	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0

Summan av ”produktraden” är 4. Vi har här produkterna $1 \cdot 1 = 1$ om båda är möjliga och $1 \cdot 0 = 0$ eller $0 \cdot 0 = 0$ om minst en av dem är omöjlig.

Detta förfarande, att vända på den ena och skjuta den i sidled lagom mycket, är grunden i att falta. Gör vi samma sak för alla andra summor än 5 får vi den här tabellen för summan av prickarna två tärningar:

två tärningar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
antal möjligheter	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	0

Tre tärningar

Med tre tärningar bildar alla möjligheter en kub med $6 \cdot 6 \cdot 6$ platser – då är det svårare än med två tärningar att se geometriskt hur många möjligheter det blir. För att inte tala om fyra tärningar. Men om vi fortsätter att falta är det lätt att hantera både tre och fyra och flera tärningar.

Om vi lägger till en tärning till de två vi hade förut, hur många sätt finns det då att få 7, exempelvis? Jo, för varje möjligt resultat x på den nya tärningen är det antalet möjliga sätt att få $7-x$ på de två övriga, som ska läggas ihop. Då ska vi alltså falta en tärning med två. Vänd den tredje baklänges, och skjut i sidled så vi får 7 i varje kolonn:

två tärningar		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
antal möjligheter		0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	0
tredje	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
tärningen	0	0	1	1	1	1	1	1	0						
produkter	0	0	0	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0	0

Vi får $1+2+3+4+5=15$ möjligheter att få 7 med tre tärningar. Om vi fortsätter att förskjuta den tredje tärningens tabell och räknar ut samtliga möjligheter, så får vi följande beteende för tre tärningar:

två tärningar	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
antal möjligheter	0	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Fyra tärningar

Och med fyra tärningar då? Då kan vi förstås falta det resultat vi nyss fick (tre tärningar) med ytterligare en tärning. För antalet sätt att få summan S kan vi få från var och en av de sex möjliga resultaten x från den nya tärningen, om summan av de andra är $S-x$. Vi formulerade just en rekursionsformel: antalet sätt med n tärningar kan vi få från sex fall med $n-1$ tärningar. Om antalet sätt att få S när vi slår n tärningar är T, så sa vi att

$$T(n,S) = T(n-1,S-1) + \cdots + T(n-1,S-6).$$

Men vi kan också ta de fyra tärningarna två och två. Om vi undrar hur många sätt vi kan få 13, till exempel, så bestäms det av antalet sätt att få summan x på de två första, tillsammans med att få $13-x$ med de två andra. Det blir antalet sätt för de två första gånger antalet för de två andra. För det kan ske på alla sätt, i båda två tärningsparen. Då blir det så här:

två tärningar		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T(2,S)		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
två tärningar	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	
T(2, 13–S)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
produkter	0	2	6	12	20	30	30	20	12	6	2	

Så antalet sätt att få 13 med fyra tärningar är 2 (2+6+12+20+30) = 140. Vi kan alltså falta T(2,S) med T(2,S) (som båda i sin tur är faltningar av T(1,S) med T(1,S)). Eller lika gärna T(1,S) med T(3,S). Båda är lika med T(4,S).

Sex tärningar

Nu kan vi ganska lätt beräkna hur många sätt det finns att få 20, till exempel genom ett slag med 6 tärningar, genom att falta T(3,S) med T(3,S).

Vad är faltning?

Vad är då faltning (eng: *convolution*) för någon märklig operation som så lätt ger oss antalet möjligheter? Vi har två följder f(k) och g(k) som är noll för negativa k. För S = 2 har vi denna förskjutning av g(k):

	f(k)	0	f(0)	f(1)	f(2)	f(3)	f(4)
g(2–k)	g(4)	g(3)	g(2)	g(1)	g(0)	0	
produkter	0	0	f(0)g(2)	f(1)g(1)	f(2)g(0)	0	0

Så ska vi alltså vända den ena baklänges (byta k mot –k) och flytta den i sidled S steg (byta – k mot S – k). Det ger g(S – k). Summan av produkterna är då faltningen:

$$f * g(S) = \sum_{k=0}^{S} f(k)g(S-k).$$

I tabellen till höger är S = 0, 1 och 2, men i exemplen ovan var S = 5, 7 och 13 så vi fick göra betydligt mer räknande. Som vi sett i exemplen med tärningarna är faltningen en ny talföljd, som bestäms av följderna f(S) och g(S). Den brukar skrivas f∗g(S), då ∗ är en etablerad symbol för denna operation. Man kan visa att faltning är associativ, distributiv och kommutativ precis som multiplikation. För följder av längden ett är faltning samma som multiplikation. Om vi betecknar T(1,S)^{*n}=T(1,S)∗...∗T(1,S) med n ”faktorer” i faltningen, så gäller då att T(n,S)=T(1,S)^{*n}. För varje tärning T(1,S) med sina sex ettor och resten nollor, falta alla tärningarna! *Sannolikheten* att få summan S vid ett slag med n tärningar är förstås T(n,S) / 6^n. Vi kan också se att rekursionsformeln tidigare är faltningen av T(1,S) med T(n – 1,S).

S	f∗g(S)
0	f(0)g(0)
1	f(0)g(1) + f(1)g(0)
2	f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0)

Pascals triangel

Nu gör vi ett hopp till något som till en början kan tyckas vara något helt annat, till Pascals triangel som startar med bara nollor och en etta och där andra raden kommer från 0 + 0 eller 1 + 0 i raden ovanför.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Denna enkla regel visar sig ge koefficienterna i utvecklingen $(a+b)^n$– det är talen i triangeln på en viss rad. Men låt oss nu göra nästan samma sak, men addera de sex talen närmast ovanför, i stället för två tal. Då blir första steget

0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	0	0	0	0	0	0
0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Den feta ettan i andra raden är summan av de sex feta närmast ovanför, tre till vänster och tre till höger, fem nollor och en etta. Fortsätter vi så, men utan att skriva ut nollorna, så får vi följande triangel:

1

1 1 1 1 1 1

1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1

Denna variant av Pascals triangel ger samma tal som de vi räknade ut i början av artikeln. Det är samma räkningar som vi då gjorde, uppskrivna på ett något annorlunda sätt. Nästa rad i Pascals vanliga triangel kan man alltså också se som en faltning av föregående rad med rad två, sekvensen $\{1,1\}$ med bara två ettor– nämligen att addera två tal.

Det finns en generalisering av binomialkoefficient som kallas multinomialkoefficient, men det är inte samma generalisering som den här. Det är ett annat begrepp. För vad vi räknat med här finns beteckningen $\binom{n}{k}_m$ (Andrews 1990), där m är antalet tal som ska adderas. Pascals triangel ges av $m = 2$, och den nya triangeln ovan visar talen $\binom{n}{k}_6$ för n upp till 3 (sista raden). Det finns dock inget etablerat namn för dessa tal, vilket är ett problem eftersom det är en så naturlig generalisering. Jag föreslår *binomionkoefficient-*, med ändelsen ”-on” som på franska betyder ”stor” – lite större än binomial (som också tillåter ”multinomionkoefficient”). Således anger talet $\binom{n}{k}_m$ hur många sätt man kan få summan $k+n$ genom att rulla n stycken m-sidiga tärningar. Sannolikheten att få summan s är då $\binom{n}{s-n}_m m^{-n}$.

Talen i en Pascaltriangel där man summerar tre tal kallas *trinomialtal*. Men ordet trinomial förekommer tyvärr i två olika betydelser.:
Trinomial (betydelse i denna artikel, som istället kunde kallas "trinomion"):
en.wikipedia.org/wiki/Trinomial_triangle.
Trinomial, den vanligare betydelsen:
en.wikipedia.org/wiki/Trinomial_coefficient.
Med min terminologi så har vi ovan sett en triangel med 6-nomiontal.

LITTERATUR

Andrews, G. (1990) Euler's 'exemplum memorabile inductionis fallacis' and q-trinomial coefficients. *J. Amer. Math. Soc.* 3, 653–669, 1990.