



Matematikutbildning – möte mellan två kulturer

Håkan Lennerstad

Matematikern Håkan Lennerstad läser Nämnaren utifrån problematiken mellan matematik som vetenskaplig disciplin och matematik som matematikutbildning. De två kulturerna måste mötas, men har svårigheter att göra det, menar författaren. Han diskuterar frågor om språk, känslor, spel och humor med olika exempel från Nämnaren, och belyser på så sätt relationen mellan de två kulturerna och förutsättningarna för ökad förståelse.

Denna artikel handlar om spel, känslor, humor, isflak och förstås matematik, ackompanjerat med nedslag ur Nämnarens utgivning. Om den nästan tragiska kollisionen mellan matematikernas entusiasm och förälskelse i sitt ämne å ena sidan, och matematikspråkets svärgenomtränglighet å den andra. Om matematikverksamhetens osynlighet och helt annorlunda egenskaper, jämfört med matematiken själv.

Detta är frågor som Nämnarens artiklar belyser ur ständigt nya synvinklar. Under tecknad är universitetslektor i matematik, och bidrar här med en kanske inte så typisk artikel. Min läsning av Nämnaren antyder att artiklar skrivna av matematiker oftast beskriver matematiska idéer eller matematisk historia. Artiklar skrivna av matematiklärare handlar ofta om elevaktivitet och elevers entusiasm. Matematiker

beskriver matematik. Matematiklärare beskriver elevaktivitet. Detta är alldeles naturligt, men också en antydning om komplexiteten hos matematikutbildningsproblemet: det innehåller i högsta grad både naturvetenskap (matematik) och humaniora (människors arbetande, tänkande, fattande). De två kulturerna måste mötas, men har uppenbara svårigheter att göra det.

Vad?

Är matematik naturvetenskap?

Men är matematik naturvetenskap? Och gäller inte det beskrivna kulturmötet utbildning i alla naturvetenskapliga ämnen? Mina svar är: ”i utbildningssituationen är matematik verkligen naturvetenskap” och ”Nej, det beskrivna kulturmötet gäller inte i så hög grad alla naturvetenskapliga ämnen”! Matematik är helt klart inte naturvetenskap – man testar inte hypoteser med experiment, man studerar inte naturen och omvärlden, i varje fall inte direkt. Matematik har mera karaktär av ”rent tänkande”, och är på så sätt mer besläktat med filosofi och logik. Men å andra sidan har matematik nästan alla sina tillämpningar i naturvetenskap och teknik, till skillnad från filosofi och logik, och matematik har verkligen enorma mängder tillämpningar. Detta

Håkan Lennerstad är universitetslektor i matematik. Han har läst teknisk fysik och doktorerat i matematik på Chalmers. Sedan 1992 har han varit verksam vid Högskolan i Karlskrona/Ronneby. Han har bedrivit forskning inom partiella differentialekvationer och organisation av paralleldatorer. Han är också läroboksförfattare och uppfinnare. Han intresserar sig nu mycket för utforskande student-lärardialoger om matematik, bland annat i syfte att producera nya läromedel.

är en dubbelhet hos matematikämnet. Dessutom vill jag påstå att matematik är typisk naturvetenskap om man tittar på vilket slags tänkande det handlar om. I matematikstudier erövrar man kunskaper som är objektiva och opersonliga. Resonemang och studier om människors beteenden och människors tänkande, som är typiskt för humaniora och samhällsvetenskap, är inte alls typiskt för matematikstudier. Här lär man i praktiken känna en främmande – matematisk – värld, där inga människor och inget mänskligt syns till. Om naturvetenskap handlar om att lära känna fenomen utanför den egna personen och den mänskliga sfären, så är matematik i högsta grad en naturvetenskap. Dessutom har andra naturvetenskaper mer vardagsanknytning, och använder ett eget tekniskt specialspråk i mycket mindre grad än matematik. Den matematiska världen är på så sätt kanske mer ”främmande”, och matematik mer naturvetenskaplig än annan naturvetenskap. Kulturkrocken är ganska renodlad i fallet matematikutbildning – kontrasten mellan ämnets karaktär och lärandets karaktär är ovanligt stor.

Trots den starkt upplevda objektiviteten är matematik något som finns i våra huvuden. Ur praktisk synvinkel är den i högsta grad objektiv, alla är/blir överens, fast den bara finns mentalt, i sinsemellan mycket olika personligheters medvetanden. Är inte detta märkligt? Men å andra sidan, finns den inte i vår omvärld? Mitt svar är att vår omvärld innehåller gott om fenomen som inte är matematik, men som liknar matematik, och som inspirerar matematikens vidare utveckling. Matematik är verkligen förvirrande, mystiskt, och för många spännande. Det gäller inte bara de matematiska teorierna, utan även matematikens natur. Sådana frågor har länge debatterats, och kommer att debatteras av matematiker, filosofer och andra.

Att uppfinna eller upptäcka

En annan dubbelhet hos matematiken är den gamla frågan om matematiken upptäcks eller uppfinns. Jag menar att vi uppfinner definitionerna, men när väl de är bestämda så är allt bestämt. Med andra definitioner får vi andra sanningar. När definitionerna är bestämda finns allt där för att upptäckas: vi upptäcker satserna. Definitioner väljs med matematiska argument, men mera med skönhets- och användbarhetsargument än med logiska/matematiska argument. Man kan i vilket klassrum som helst uppfinna en egen matematik genom att uppfinna egna definitioner, och försöka se vad de leder till.

Vi sysslar med ett ämne som är fullt av mysterier och paradoxer. Trots detta finns där gott om, någon sorts, mycket pålitliga sanningar. Vilket ämne!

Nämnnaren för allmänbildning

Åter till matematikutbildningen och vår jubilar Nämnnaren. Jag vill påstå att Nämnnaren har spelat en viktig roll för matematikutbildningen i Sverige på åtminstone tre sätt:

- Nämnnaren ger allmänbildning i matematikutbildningsområdet. Den som läser eller ögnar igenom Nämnnaren kan knappast undvika att bredda och aktualisera sin bild av området. Spektrumet av inslag i Nämnnaren är mycket brett. Inslagen är lagom långa och lättillgängliga.
- Goda idéer kan via Nämnnaren lätt spridas och kombineras till nya framgångsrika verksamheter.
- Men viktigast är kanske att Nämnnarens bidrag genomsyras av ett allvar och en gemensam positiv anda: låt oss försöka samla ihop och pröva alla idéer som kan entusiasmera elever och lärare på alla nivåer för bättre matematikkunskaper och roligare verksamhet.

Denna positiva och konstruktiva attityd etableras som det normala förhållningssättet genom Nämnnarens massiva idé-eldgivning.

Den sista punkten kanske kan liknas vid den effekt Astrid Lindgrens författarskap har haft på svensk barnuppfostran. Hon har bidragit till synliggörande av barn som tänkande och kännande individer. Jag skulle för 2000-talet önska ett synliggörande av elevers/studenters tänkande och kännande under matematikstudier. Det vore bra för lärarna, för eleverna och för matematiken.

Låt oss titta på några exempel ur Nämnan.

Spel är förmatematik

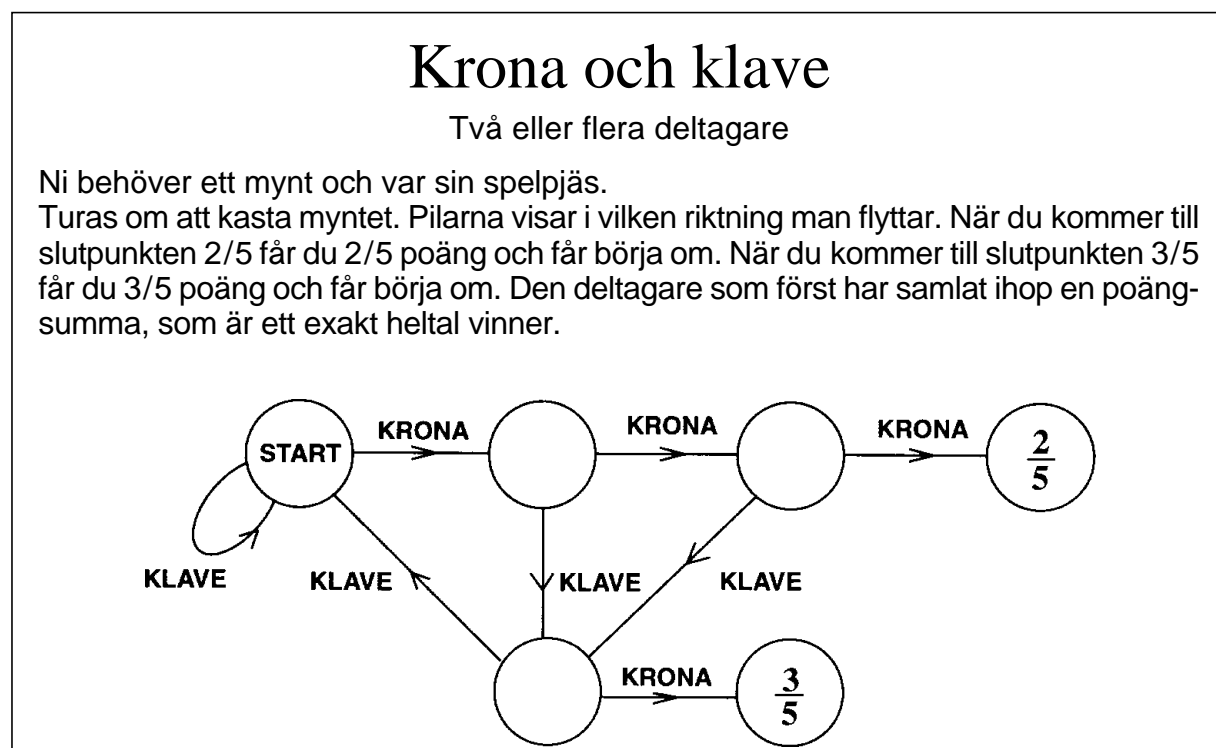
I artiklarna "Spel för kunskapande" och "Spel och spelande" beskriver Ingela Johansson (1995; 1996) flera genomtänkta och lockande aritmetiska och geometriska spel, mest med papper och penna. Spelen kan skapa situationer där matematiska kunskaper blir efterfrågade av barnen. Dessa artiklar värmdde mitt hjärta på ett särskilt sätt. Jag tillbringade stora delar av barndomen med att spela och hitta på olika spel tillsammans med min lekkamrat Hasse. Jag vill påstå att detta underlättade mina senare matematikstudier en hel del – de var en sorts fortsättning på spelen, men med större allvar och abstraktion. Många av oss dras

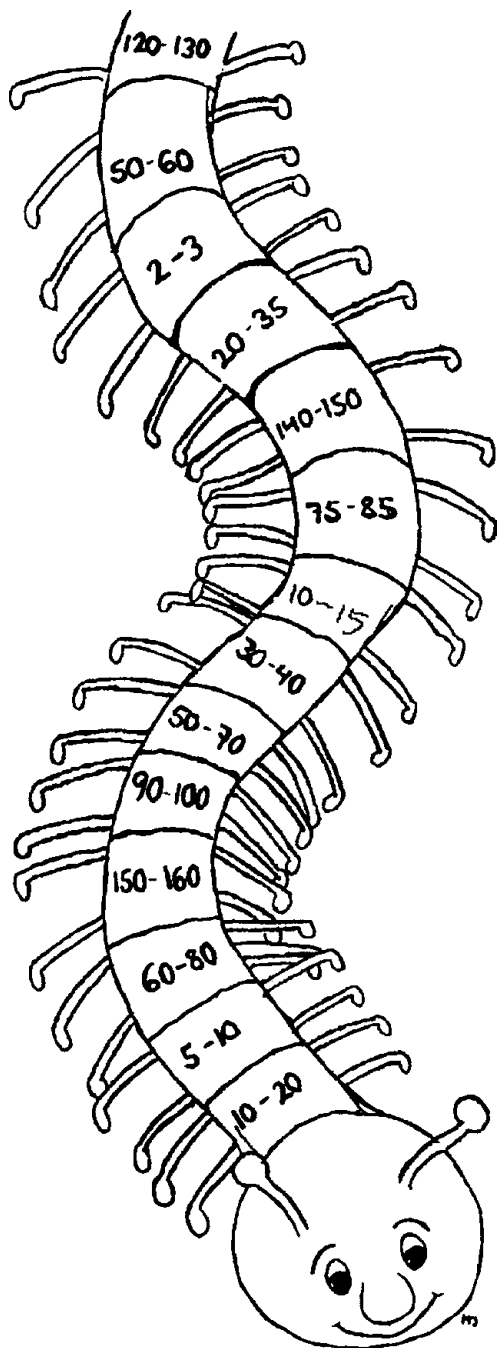
till eller passar för yrkesverksamheter som är fortsättningar på barndomspassioner.

Spel och matematik har åtminstone tre ganska fundamentala likheter:

1. Det finns vissa givna förutsättningar, spelregler respektive definitioner, och verksamheten går ut på att finna så bra sätt som möjligt att använda förutsättningarna – vinnande spelsätt respektive kraftfulla teorem.
2. Mycket matematik och många spel modellerar verkliga fenomen. Spelens modeller är mycket primitiva och har som syfte underhållning och spänning. Men möjligheten med att verklighet kan representeras med siffror demonstreras tydligt.
3. Byte av spel och ändring av regler ökar flexibiliteten i tänkandet och beredskapen att ta ställning till vad som är möjligt under förändrade förutsättningar. Detta är en viktig del av matematiktänkandet. På samma sätt har olika matematikkurser helt olika förutsättningar – de svarar mot olika spel.

Spelen tränar aritmetik och geometri, men också matematiskt tänkande i vidare mening. Här är ett par av Ingela Johanssons finurliga spel:





TUSENFOTING

Två eller flera deltagare

Ni behöver en miniräknare, en tärning, var sin spelpjäs och ett papper att anteckna poäng på.

Placera era spelpjäser på tusenfotingens huvud och tryck in ett tal med många decimaler - vilket som helst - på miniräknaren. Slå om vem som ska börja. Kasta tärningen. Om du får t ex en fyra så flytta din spelpjäs fyra steg framåt. Multiplicera talet på miniräknaren med vilket tal du vill. Om produkten ligger mellan de två tal, där din spelpjäs står, så får du 2 poäng. Om du inte kom rätt får du göra ett nytt försök (med det nya talet på miniräknaren). Lyckas du denna gång får du 1 poäng. Nu är det näste deltagares tur att slå tärningen, osv. Den som har flest poäng, när den förste kommer i mål (tillbaka till huvudet) vinner.

Variation: dividera i stället för att multiplicera hela spelet igenom.

*Hjernan i mig ännu vrides
När jag tänker på Euklides
Och på de Trianglarna
A b c och c d a
Swetten ur min panna gnides,
Wärre än på Golgatha.*

Carl Mikael Bellman
Claesson (1994)

Känslor och matematik

Människor reagerar mycket ofta starkt känslomässigt när de sysslar med matematik – detta är snarare typiskt än ovanligt. Starka känslor hör ihop med matematik. Det är lätt att ge exempel på både fattar- ingenting-ångest och insikts-jubelkänslor. Här är tre ångestexempel.

Matematik är väl det mest ångestladdade ämnet av alla.

Ference Marton (1986)

Hela mitt liv har det för mig varit en gåta varför det inte skulle kunna lyckas mig att få ett förhållande till matematiken,... Under matematikkursens fortgång kunde jag klara mig nödortfigt endast genom att "skriva av" de för mig ofattbara algebraiska operationerna och inpräglade i minnet var en bestämd bokstavskombination hade stått på svar-tavlan.

Carl Jung
Thompson (1985)

Inger Wistedt diskuterar i *Matematiska samtal* (1993) hur elevers samtal om matematik kan utveckla matematikförståelsen. Genom matematiska samtal får barnen en möjlighet att uttrycka och reflektera över sina tankar, och de får också en chans att pröva och ompröva dem i samspel med andra. Wistedt påpekar bland annat hur viktigt det är att en vuxen är närvarande och hjälper till med att finna ord och formuleringar vid elevernas sökande samtal. Det visar sig som ett tydligt jubel-exempel, som man kan se i ett senare arbete, *Kvaliteter i elevers tänkande* (Wistedt och Martinsson 1994).

Elvaåringar som inte hade sett oändliga decimalutvecklingar tillfrågades att skriva $100/3$ som decimaltal. Man prövade och upptäckte i små grupper under ca 50 minuter. Några slutkommentarer:

Den vuxne observatören:

- *Var det kul?*
- *Mmm, svarar Karolina.*
- *Ja, säger Alexandra. Jättekul.*
- *Var det knepigt?* frågar observatören.
- *Ja, där fick man fundera, verkligen,* säger Alexandra.

I en annan grupp:

- *Här får man verkligen tänka,* säger John glatt.

Och senare:

- *Ja, det här var svårt,* säger John, men tycker samtidigt att *vi var otroligt nära.*

Ida vill gärna fortsätta med fler uppgifter:

Det var ju roligt det här, säger hon glatt.

Detta illustrerar kanske Herakleitos påpekande från ca 400 f.Kr:

*Att undervisa är inte att fylla en hink.
Det är att tända en eld.*

Det var svårt! Det var kul! Man fick verkligen tänka!

Kombinationen *Det var svårt! Det var kul! Man fick verkligen tänka!* är förstås en underbar och lovande kombination. För dessa barn var det inte någon nackdel att problemet var svårt. Problemlösandet kanske tilltalade barnens filosofiska sinne. Det var uppenbarligen grupper med kreativ anda – det var tillåtet att göra fel ibland medan man tog sig fram till hur det verkligen hängde ihop.

I ”Petter och hans 4 getter” visar Berit Bergius och Lillemor Emanuelsson (1998) hur ett undersökande arbetssätt med matematik kan vara uppskattat hos elever i åk 2 och 3. I ett problem ska eleverna bli extrapolera en dold del av svansen på en överraskad råtta. Här får man göra numeriska bedömningar, och sedan arbeta vidare med de tal man valde. Det måste vara bra för det matematiska självförtroendet!



Katten hette Murre Svart.

Uppgiften var:

- Konstruera ostbiten lika stor som i boken. Hela osten.
- Hur många möss tar Murre Svart?
- Hur lång är svansen?
- Hur långa är alla svansarna tillsammans?

Här är några elevkommentar:

Nu ska jag skriva om osten. Först skulle vi konstruera osten utav papper. Sen fick vi göra en till uppgift. Hur svansen såg ut bakom osten. Det var inte alls svårt.

Jag tycker det var den tråkigaste uppgiften i Petter och hans 4 getter. Jag blev så hungrig av att tänka på ost. Men den var bra och lättast. Hihi.

Vi har kollat i Petterboken på en mus som sitter vid en ost. Vi mätte och ritade den musen. Sen gick svansen in i osten, så jag fick komma på hur lång svansen skulle vara själv. Sen skulle vi sy minst 4 möss var för att vi skulle få 96 möss. För i Petterboken stod det att Murre Svart tog en råtta varje kvart. På ett dygn tog Murre Svart 96 möss, om han inte sov. När vi hade satt på morrhåren på mössen satte vi på svansen. Alla 4 mössen måste ha lika långa svansar. Sen la vi ut alla på golvet efter svanslängden. Vi la dom på rad. Det var mest (flest) på svanslängden 15 cm fast jag hade 16. Alla mössens svansar är tillsammans cirka en Brachiosaurus, är cirka 20 m. Det var några möss för många. Då tog vi bort några dom fick vi ta hem. Jag har lärt mig sy mäta och ha tålamod. Jag tycker det här arbetet var roligt, när vi skulle göra mössen och komma på hur lång svansen skulle vara.

I "Drakar, vatten, eld och väderkvarnar" beskriver Per Bergstén (1995) hur elever på estetiska programmet i gymnasieskolan fick bygga en modell av gymnasieskolans scen. Eleverna fick själva göra alla matematiska kalkyler som behövdes för modellen.

Jag har för första gången i hela mitt liv gått till mattelektionen med glädje, eftersom det varit roligt.

Jag tycker vi skall göra sånt här oftare, för det var både roligt och praktiskt.

Skala fastnade mycket mer när man fick räkna ut, rita upp och sedan skära till.

Det finns gott om jubel exempel, exempelvis från forskande matematiker. Men varför låter ett påstående som "Matematik hör ihop med starka känslor" som ett ganska udda påstående? Ja, matematiken är ju kylig, opersonlig, värde- och känsloneutral. Men sådan är inte matematikverksamheten! Mänsklig verksamhet är alltid känslomässig, mer eller mindre, för matematik gäller nog "mer". Detta är en sida av den remarkabla kontrasten mellan matematik och matematikverksamhet. Det är också ett exempel på matematikverksamhetens osynlighet. I klassrummen pratas det en hel del om vad som händer när man sysslar med matematik, liksom i matematikläro-utbildningen. Men det syns inte mycket i läroböcker och i den officiella matematikbeskrivningen, och har följaktligen en blygsam plats i vårt medvetande. Att se sitt tänkande kan väl inbegripas i att se verksamheten – tänkande är oftast en del av matematikverksamheten.

Även ordet "matematik" används på ett udda sätt. Det betecknar ju bara resultatet, kunskaperna, sanningarna. Verksamheten finns inte med. "Fiske" betyder inte bara verksamhetens resultat: fisken i spannen. I begreppet "kemi" ingår laborationsmetoder, inte bara den samlade kunskapen. Verksamheten och kunskapsöverföringsmetoderna är däremot inte innehållna i den konventionella betydelsen av ordet "matematik"!

Kunskap om matematikverksamheten är viktig – den studeras i matematikläro-utbildningen, och i själva matematikutbildningen, och utvecklas av didaktikforskningen. Hur ska man kunna förmedla ett ämne till människor, om man inte förstår vad som händer när människor sysslar med det?

Vad som händer vid matematiktänkande är ofta känslomässigt. Tankarnas känslorreaktioner kan synliggöras genom att överföras till välbekanta förhållanden. Här är en gestaltning av logik samt av känslolösheten i en kort tankeresä:

Tre matemaner är ute en riktigt kall vinter. Det blåser. De har inte långt till en varm fjällstuga, men enda sättet att komma dit är att lösa ekvationen $x^2 + 2x - 8 = 0$. Fjällstugan ligger på andra sidan en långsamt flytande flod, där mäktiga isflak kommer drivande. De kan komma över från ett isflak till ett annat via ett =, om likheten håller. Vissa isflak har avbrutna \neq som hänger från isflaken ner i vattnet.

Matemano: *Jag fryser.*

Matemon (tittar ner över kanten): *Så kallt vattnet ser ut där nere. Det är ju alldeles svart.*

Matemini: *Vi kvadratkompletterar. Det är alltid bra att kvadratkomplettera. Då kommer vi över till $x^2 + 2x + 1 - 1 - 8$, alltså till $x^2 + 2x + 1 - 9$.*

Matemano: *Men det går inte, vi kommer inte vidare sedan!*

Matemini: *Jo det gör vi. Jag har en idé.*

Matemon: *Vi kan i alla fall inte stå kvar här och frysa.*

De klättrar över från $0 =$ till isflaket $x^2 + 2x + 1 - 9$. (Likhetstecknet är en bro, "0" är på stranden.)

Matemano: *Det höll! Det trodde jag egentligen inte! Men jag ville inte lämna er.*

Matemon: *OK, men nu måste vi fortsätta dit! (Pekar på $(x + 1)^2 - 9$).*

De klättrar över på nästa "=". Matemon, Matemano följt av Matemini. De stannar och tittar sig omkring. Strandens är nu en bit bakom dem. De är omgivna av andra flytande isflak.

Matemon: *Lever det någon fisk i så kallt vatten?*

Matemano (med skräck i rösten): *Men nu kommer vi inte vidare. Jag visste det!*

Matemini: *Jo! Jag vet! Använd konjugeringsregeln!*

Matemano: *Här??? Nej! Det går inte!*

Matemon (hoppas, huttrande): *Jag fryser.*

Matemini: *Jo! $9 = 32!$ Se! (Pekar på ett närbeläget isflak med $(x + 1 - 3)(x + 1 + 3)$.) Kom!*

Matemini klättrar över, och det håller! De andra följer efter.

Matemon: *Men nu är det ju $(x - 2)(x + 4)$.*

Matemano: *Lösningarna är 2 och -4!! Kom!*

Plötsligt syns $(x - 2)(x + 4)$ på stranden framför fjällstugan. De klättrar över det sista likhetstecknet och springer in i den varma stugan. De lyckades! Där inne brinner en brasa. Matemäster står vid spisen och rör i en rykande kastrull.

Matemäster: *Grattis, matemaner! Ni kan väl behöva lite varm chokladmjölk och scones!*

Här hade de tur (eller skicklighet): Matemini hade en idé från början, som fungerade. Dyliga dramatiseringar kräver kanske en viss försiktighet så de inte ökar rädslan för ett misslyckande. Varje isflak kan alternativt innehålla ett logiskt påstående, då är broarna ekvivalenspilar.

En fråga om studenters tänkande

Jag frågade en gång en medmatematiker:

– Du som har mycket lång erfarenhet av matematikundervisning, brukar ha mycket kontakt och dialog med studenterna, och dessutom ha många åsikter om hur man borde ändra och förbättra utbildningen, skulle du kunna skriva en lista med de vanligaste fel som studenterna gör i dina kurser?

Han tänkte efter en stund, och sa sedan:

– Nej, det tror jag inte. Jag har inte tänkt på det så.

– Hm, tänkte jag när jag senare tänkte på svaret. Matematikkunskaperna destilleras, koncentreras och tillspetsas i rapport efter rapport. Men här finns en massa viktig undervisningskunskap som är utspridd, oorganiserad, och därför oåtkomlig. Som inte insamlas, raffineras och presenteras. På Högskolan i Karlskrona/Ronneby startade vi en forskningsrapportserie (Research Report) 1992, som nu består av många artiklar. Senare startade vi en utbildningsrapportserie (Education Report), som fortfarande bara innehåller en artikel! Ännu ett exempel på matematikverksamhetens notoriska osynlighet.

Mitt syfte med frågan var att skriva text, mest dialoger, som skildrar studenter som ibland tillsammans med en lärare seriöst försöker få grepp om en grundläggande universitetsmatematikkurs. I dialogerna borde bl.a. matematikidéerna kunna synliggöras bättre än i konventionell framställning. Dessa student-student och student-lärdialoger borde kunna vara riktigt intressanta för studenter, om det berör för studenterna angelägna matematikfrågor på ett intressant sätt, och visar ett kreativt sökande.

Därav frågan till min medmatematiker. Nya projekt väcker nya frågor.

Idésamtal kräver vardagsspråk

Många Nämnarenförfattare tar upp det viktiga i att elever beskriver matematik och samtalar matematik. Matematikspråket är mycket användbart för räknande, men sällan för att beskriva eventuella idéer, avsikter och poänger bakom samma räknande. Idédiskussion är filosofisk till sin natur på så sätt att man kan diskutera hur länge som helst, den kan ge en hel del Aha!-upplevelser, men man finner bara nya olösta frågor, och det finns inga färdiga svar. Det är ett prövande av synvinklar.

Idésamtal kräver vardagsspråk även av lärare/matematiker för att:

- verkligen vara angelägen för elever/studenter, och bidra till mening med räknandet,
- det ständiga prövandet hör hemma i muntliga dialoger, vardagsspråk.
- det är naturligt att använda alla bilder man kommer på, varav många är mycket vardagliga.

En orsak till att de matematiska idéerna ofta är bristfälligt beskrivna i matematiska läroböcker kan vara att ambitiösa idébeskrivningar inte passar in stilmässigt, det blir för vardagligt språk. Man nöjer sig med det matematiska språket, vilket räcker för matematiker och blivande matematiker. För många läsare försvinner då idéerna, kvar finns en ganska tom formalism. Naturligtvis bör matematiskt språk inte undvikas på något sätt. Det är bara otillräckligt för att fånga, skissa och exemplifiera idéerna.

Jag tycker det är mycket tydligt att vissa elever har svårt med språket och lätt för innehållet, medan det för andra är tvärtom. För att nå så många som möjligt är det viktigt att komplettera den matematiska formalismen med att försöka formulera idéerna.

Perspektivproblemet

Jag tror att nästan alla som har läst någon matematikkurs anser att de borde förstå den studerade matematiken bättre än de gör. Det gäller nog minst 99% av alla som läst någon matematikkurs, inklusive matematikerna själva. Detta är kanske det största hindret för en öppen diskussion i ett klassrum. Man riskerar att öppna inre avgrunder, som man inte vet hur djupa de är.

Det värsta är att mycket av detta dåliga matematiksamvete nog är en oavsiktlig följd av matematikernas entusiasm och förälskelse i sitt ämne. Matematikkurser har en egenhet att vara svåra eller mycket svåra medan de assimileras, och nästan barnsligt lätta efteråt. Kurserna är förstås ännu lättare för en matematiker som har undervisat några gånger på kursen. Denne *kan språket* på ett självklart sätt. Man tänker på matematik och inte på språket när man lär sig matematik. När denne undervisar en kurs är det nästan *mänskligt omöjligt* för denne att förstå hur lite av det matematiska språket som kan tolkas av studenterna. Detta är perspektivproblemet. Det är mycket få lärare som verkligen kan se det hela ur studentens perspektiv. Förståga till detta är förstås möjlig, det är en särskild kompetens. Denna kompetens är humanistisk till sin natur. Perspektivproblemet är ett fall av kulturkrock mellan de två kulturerna. Matematikern är tekniker snarare än humanist. Matematikers specialistkunskaper handlar inte om hur människor lär sig, hur lärandet utvecklas, vad som successivt händer i huvudet på studenter. Specialistkunskapen är matematik, vilket mera bör jämföras med ett mentalt, men ändå opersonligt, maskineri.

Detta hindrar inte att det finns många matematiker som är ypperliga föreläsare. Jag har själv läst flera matematikkurser som var förelästa på ett strålande sätt. Vissa av dessa har jag först långt senare börjat förstå vad de handlade om. Vissa förstår jag ungefär på samma sätt som då, endast detaljkunskaperna har förbättras.

Är matematik verkligen lätt?

Budskapet som onödigtvis ofta förmedlas av den entusiastiske matematikern är: *detta är mycket lätt*. Studenten upplever: *detta är mycket svårt*. Studenten tänker: *jag borde kunna detta bättre, det är ju egentligen lätt*. Situationen frestar ordentligt på självförtroendet. För studenten är det lite grand som att lära sig fransk historia på franska utan att kunna särskilt mycket franska – man får försöka lära sig språket samtidigt som innehållet. Det kanske går, men det är inte lätt, och det tar tid.

Det finns nog i grunden bara ett sätt att komma åt perspektivproblemet: konstruktiva dialoger mellan matematiklärare och studenter. Kanske betyder det vänligt provocerande lärare och vänligt protesterande (aktiva) studenter. Den stora nackdelen med den annars naturliga föreläsningsformen är att dialoger brukar vara ovanliga. Bra didaktisk utbildning av lärarna kan givetvis förbättra förutsättningarna väsentligt. Men dessa förutsättningar är nog ganska bortkastade om inte en dialog kommer till stånd. I en dialogfattig miljö tar perspektivproblemet överhanden.

Det sägs om en framstående matematikprofessor att han ger underbara föreläsningar när han inte är förberedd, men obegripliga när han är förberedd. Perspektivproblemet är ett fundamentalt och återkommande pedagogiskt bekymmer på alla nivåer.

Låt oss på 2000-talet dumpa denna gemensamma kulturella ballast: föreställningen att de kunskaper vi besitter är otillräckliga! Kunskaper är alltid ofullständiga! Låt oss strunta i det, låt oss bara ta fasta på vad vi kan, det räcker en bra bit! Och låt oss successivt lära oss lite mer! Mer kan vi väl ändå aldrig göra?

Språket – uttrycker och döljer

Matematiker säger ibland att det matematiska innehållet egentligen är ganska självklart för alla människor – jag kan också hålla med om det. Om det finns en viss sanning i påståendet, så infinner sig två följdfrågor:

- Varför misslyckas i så fall matematik-kurserna så ofta?
- Är det matematiska språket ett hinder som gör det matematiska innehållet svårt att urskilja?

Språket uttrycker idéerna, men detta är inte uppenbart. De språkliga motsvarigheterna liknar inte idéerna på något omedelbart sätt. Matematikkurserna beskriver oftast orden betydligt mer än ordens innehåll, idéerna. Det är inte så konstigt: idéerna är mera personliga och diffusa, orden är mera konkreta och generella. Men syftet med orden är ändå inte att de ska ersätta sitt innehåll. Matematik är inte bara manipulation av symboler.

Matematikens språkliga problem diskuteras inte ofta av matematiker. Men i det förra jubileumsnumret *Nämnamn* 100 (1991) finns en intervju som berör detta problem

Göran Emanuelsson:

Vad säger du om kopplingen svenska-matematik? Om elevers och lärares tänkande i matematik?

Inger Björneloo, lärare på lågstadiet:

Ja, att översätta mellan talspråk, symbolspråk och skriftspråk är viktigt. Lärare ska inte vara så rädda utan våga mera – lita till sina egna observationer – men också studera mera, vara mer nyfikna på konsekvenserna av sin egen undervisning. När jag funderade på varför-frågor, så hade jag hakat upp mig på svårigheterna – men jag kom att se de inneboende möjligheterna, barnens inneboende tankekrafter. Dom fattar ju! Dom löser uppgifter som jag inte tänkt mig att de skulle göra. Jag fann att man kunde stryka uppgifter i läroboken – för

att vi bildat begreppen utanför boken. Man behövde inte göra allt femtioelva gånger.

Allt är steg på vägen. Man måste utveckla och utvecklas.

I detta citat berör kanske inte Inger Björneloo det språkliga problemet så utförligt. Men det hon framhåller är minst lika viktigt på senare utbildningsnivåer. Allt är steg på vägen!

Det är på alla nivåer viktigt att översätta mellan talspråk, symbolspråk och skriftspråk. Detta kräver finnande och uppfinnande av träffande bilder och metaforer. Slående metaforer är mycket viktiga: de är bryggor från vardaglig kunskap till matematiska begrepp. Man minns också ett abstrakt begrepp mycket lättare om det är associerat med en slående bild. Att undersöka hur bra metaforerna fungerar är ett indirekt undersökande av det matematiska begreppet.

Språkets laddning

Språket har också ett känslomässigt innehåll. Det inte bara uttrycker idéer och döljer idéer, det har också ett visst utseende som kanske kan vara lockande eller motbjudande, mest i kraft av förmodade innebörder och andra associationer.

För mig personligen var matematiken på universitets- och doktorandnivå som en spännande, svårforcerad och mystisk värld. Medan jag studerade häpnade jag över att detta allt märkligare formella språk var relevant. Att det faktiskt var relevanta fortsättningar på naturliga idéer. Det tilltalade verkligen mitt sinne för det absurda. Och dessutom, detta allt märkligare var verkligen relevant för andra vetenskaper. Jag fascinerades av nya matematiska ord – de klingade mystiskt och lockande, jag ville förstå vad de betydde. Jag bläddrade framåt i böckerna för att se hur kommande, för mig ännu okänd matematik såg ut. Ytan var märklig och egendomlig, man kunde under ytan ana närvaron av ett okänt innehåll. Det lockade och kallade. Jag försökte inte sätta mig in i det, jag bara betraktade

ytan, språket, och anade. Jag visste att det skulle innebära mycket hårslitande för att komma under ytan; jag såg inte fram emot det. Däremot såg jag vid ungefär samma tid fram emot hårslitandet vid schackbrädet.

Humor, humör och matematik

Psykologerna säger att det numera är ganska väl bevisat att humor underlättar inlärning. Personer skrattar oftast när de mår bra – självförtroendet är uppåt. Det är nog ofta i sådana humör som nya kopplingar i ämnet dyker upp, och man vågar kasta ur sig hypoteser och förslag till samband. Då börjar samtal. Matematikstudier är ofta dechiffreering, man prövar olika tänkbara och otänkbara tolkningar tills man finner någon som tycks stämma med alla bivillkor. Humor stimulerar provandet, särskilt av de otänkbara tolkningarna. Humor hänger ihop med kreativitet och initiativ. Humor är kanske inte så vanligt i de flesta matematikläroböcker. Låt mig nämna Gilbert Strangs matematikläroböcker som ett lysande exempel. Jag tycker att hans framställning är genomsyrad av en lågmäld humor, som inte ett ögonblick lämnar den sakliga matematikframställningen. Det är svårt att lägga ifrån sig hans böcker. Humorn hänger nog samman med att han ständigt försöker ge glimtar om idéer och avsikter med formalismen.

De senaste åren har forskning inletts om människans skratt. Man vet redan att skratt har ett mycket stort antal positiva effekter, från lätt motion, via socialisering och positivare verklighetsbild, till avslappning och stresslindring. Man kan undra hur det kommer sig att vetenskapen har börjat studera något så kraftfullt först nu. Ångest och depression är mycket grundligt studerade, skratt inte alls. Problemfokuseringen har kanske indirekt lett till en viss negativism.

Det finns stora möjligheter för humor i matematik som sätter sökarljuset på vanliga missförstånd. Det matematiska språket har massor av komisk potential – inte komisk potential. Här är ett dialogexempel:

Eva: *Ett motsägelsebevis, ja. Vi antar att roten ur två är rationellt, fast vi vet att det inte är det. Tycker du det är irrationellt?*

Arne: *Nej,... ja,... kanske. Förvirra mig inte så genom att använda "irrationellt" i den andra betydelsen.*

Eva: *Förlåt, jag kunde inte motstå frestelsen. Men du genomskådade mig i alla fall.*

(Lennerstad, Pettersson 1999)

Har dessa avsiktliga missförstånd någon positiv betydelse för matematikförståelsen? Kanske lite. Man får en fokusering på orden, det tydliggör vilka betydelseorden kan ha. Matematik är en bokstavlig verksamhet, man måste verkligen läsa och se precis vad som står. Men framförallt kanske de lätt komiska missförstånden och personernas sätt att kommunicera, kan höja andan och inbjuda till senare matematiska förslag och infall. Elever/studenter kanske lättare börjar "ta för sig", dvs rycks med och engagerar sig i frågorna som diskuteras. Det är givetvis viktigt att Eva och Arne låter matematikfrågorna befinna sig i centrum för sitt engagemang.

Tack Nämnaren!

Jag vill avsluta med ett tack till Nämnarens förverkligare, samt en önskan om fortsatt välgång! Tack vare Nämnaren-gruppens ihärdighet, öppenhet och kritiska tänkande har svensk matematikutbildning en pålitlig mötesplats, fast punkt och inspirationskälla: tidskriften Nämnaren. En kort önskelista om ytterligare breddning av läsningen i Nämnaren på 2000-talet bifogas. Detta är inte minst en uppmaning till mig själv!

Önskelista

- Elevers, studenters och lärares autentiska matematikdialoger, tex: idé-formalism-dialoger. Låt alla komma till tals, verbatim!
- Förslag på konkreta bilder och metaforer som kan användas för att vardagliggöra olika matematiska begrepp, som

väcker läsaren/lyssnaren och initierar förståelseprocessen. Med nya bilder och ”motbilder” kan successivt det ”riktiga” begreppet utkristalliseras.

- Flera spel!
- Texter om det matematiska språket och sätt att synliggöra och anknyta till de matematiska idéerna.

Referenser

- Bergius, B. & Emanuelsson, L. (1998). ”Petter och hans 4 getter”. *Nämnan nr 3*, s 8–12.
- Bergstén, P. (1995). Drakar, vatten, eld och väderkvarnar. *Nämnan nr 3*, s 46–48.
- Björneloo, I. (1991). Att skriva är att utvecklas. *Nämnan nr 100*, nr 3/4, s 14–15.
- Claesson, P. (1994). Matematik som nöje. *Nämnan nr 2*, s 30–35.
- Johansson, I.(1995). Spel för kunskapande. *Nämnan nr 3*, s 42–45.
- Johansson, I.(1996). Spel och spelande. *Nämnan nr 1*, s 34–37.
- Lennerstad, H. & Pettersson, E. (1999). *Läroböcker bör vara student-lärardialoger*. Presenterat vid Kvinnor och Matematik 4, Uppsala i april 1999.
- Marton, F. (1986). Den didaktiska dimensionen. Emanuelsson, G.intervjuar. *Nämnan nr 2/3*, s 41–46.
- Strang, G. (1991). *Calculus*. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press. Massachusetts, USA.
- Strang, G. (1993) *Introduction to Linear algebra*. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press. Massachusetts, USA
- Thompson, J. (1985). Vad kan vi lära av matematikens historia. *Nämnan nr 3*, s 48–51.
- Wistedt, I. (1993). ”Matematiska samtal”. *Nämnan nr 4*, s 21–23.
- Wistedt, I. & Martinsson, M. (1994). *Kvaliteter i elevers tänkande*.Stockholms Universtitet, Pedagogiska Institutionen.

Universum och tekoppen

Den sköna matematiken

K C Cole

I Universum och tekoppen beskrivs de matematiska verktygen och hur de används. Med spännande exempel beskrivs intressanta samband. Boken innehåller fyra huvudkapitel:

Där sinnena möter matematiken, Att tolka den fysiska världen, Att tolka samhället och Sanningens matematik. K C Cole är vetenskapsjournalist på Los Angeles Times och boken är översatt av Svante Hansson och Kristin Dahl.

Originallets titel är The Universe and the Teacup. Boken ges ut av:

Svenska Förlaget
Box 3313
103 66 Stockholm

E-post: svorforlagetll@svorforlagetll.se
ISBN 91-77238-501-2