Håkan Lennerstad

Matematik som filosofiämne

Artikeln är en reflektion kring derivatabegreppet, i ett försök att besvara Marie Tängdén och Sara Wallners önskan om matematisk verbalisering, uttryckt i Elever skriver om matematik *(Nr 4. 2003). Författaren reflekterar även kring vilken roll matematiska reflektioner kan spela för olika sorters matematiskt meningsskapande.*

Egen reflektion och meningsbildning

Yttre mening – generell

Hur kan elever känna mening med matematiken? En viktig riktning för meningen är att uttrycka matematikens tillämpningar, dess användbarhet för olika ändamål. Man kommer i framtiden att behöva procent för att förstå allmänna val, för att kontrollera extrapriser, jämföra lånevillkor, liksom förstås i många yrken. Detta kan ge mening och en samhällelig inriktning. Man kan se tillämpningarna som en yttre mening för matematik.

Inre mening – individuell

Men kanske är den inre meningen lika viktig. En sådan tar sin utgångspunkt i elevers egna reflektioner som uppstår i det egna matematikarbetet. Om dessa reflektioner får möjlighet att finna svar och växa vidare kan en positiv personlig relation till matematiken växa fram. Sådana reflektioner är naturligtvis högst individuella. De är en del av individens upptäckande av sig själv, och matematikens införlivande som ett lättanvänt eget uttrycksmedel för tankegångar och problemlösning. Det är klart att en yttre och en inre mening påverkar varandra.

***Håkan Lennerstad** är docent i tillämpad matematik vid Blekinge Tekniska Högskola.*

De meningsbildande reflektionerna

Vad krävs då för att sådana meningar ska växa fram? Matematikens räknande är så kraftfullt att meningarna inte hinner med, meningarna kommer lätt på efterkälken. Meningarna är mindre tydliga och väldefinierade, mer personliga, diskutabla och otydliga. Men viktiga! Traditionell matematikbeskrivning tycks ha strukit vad som är otydligt, som varande omatematiskt. Därmed kanske vi har kastat ut barnet med badvattnet. Människor behöver mening i sina verksamheter. Man kan hävda att räknandets kraft bör matchas med en motsvarande öppenhet till fria beskrivningar av matematik med egna ord. Meningar växer fram genom elevers och lärares reflektioner. Egna meningar behöver egna ord.

Elever reflekterar om matematik...

I artikeln *Elever skriver om matematik* [2] av Marie Tängdén och Sara Wallner beskriver författarna hur de låter elever skriva reflektioner om matematik – sk reflektionsskrivande. Författarna är lärare i matematik och svenska. Reflektionsskrivande förekommer i svenska, men knappast alls i matematik. De valde att prova metoden i matematik.

Metoden innebär i korthet att varje elev i slutet av varje matematiklektion skriver om sitt matematikarbete ungefär fem minuter i en särskild (personlig) bok. Eleverna fick utöver detta använda boken när de ville.

...men lider brist på förebilder

Författarna beskriver elevernas positiva reaktioner på skrivandet. De beskriver också att eleverna hade svårt att beskriva matematik, och tar exemplet derivata (se nedan). De menar att detta är inte lätt för eleverna eftersom de så sällan ser vuxna reflektera över matematiken.

Författarna auskulterade ett flertal matematiklektioner under sin lärarutbildning. Karaktären på både merparten av lektionerna och matematikböckerna beskrivs som att språket är starkt skilt från vardagsspråk. Det är faktaspäckat och kortfattat. Sällan skriver en lärare fullständiga meningar på tavlan på en matematiklektion. Författarna skriver:

> *Vi anser att om vi lärare vill att eleverna ska kunna redogöra skriftligt för sina tankegångar måste vi föregå med gott exempel och själva formulera fullständiga tankegångar. För att öka förståelsen för de matematiska begreppen behöver vi lärare göra en koppling till det vardagliga språket. Detta för att eleverna själva ska våga använda sitt vardagsspråk även inom matematikämnet.*

Syftet med den artikel som du just nu läser är just att ge förslag på sådana tankegångar i författarnas exempel: *derivata*. Samt att koppla detta till en filosofisk matematikaspekt. Matematikverksamhet väcker ofta filosofiska frågor ur elevers utgångspunkt. Vi behöver kanske mera filosofisk tradition i matematiken.

En filosofisk aspekt på vardagsspråklighet

Wittgenstein och vardagsspråket

Wittgenstein är en intressant filosof i detta perspektiv. Han menade att allt filosoferande om ett ämne måste göras i ett vardagsspråk (se [1] sid. 583). Om det krävs ett specialspråk är det inte filosofi. En tolkning av detta är att vardagsspråket är det språk som ligger närmast var meningsupplevelserna finns – om man ser meningen som levande även i det emotionella och i en individuell helhetsbild, som inte bara är ord. Vardagsspråket är nära gränsen till det ordlösa, där kanske meningarna lever. Ett annat argument är att människor känner störst frihet och uttrycksförmåga i sitt eget vardagsspråk.

För Wittgenstein handlade det inte om filosofi för sin egen skull. Han menar att filosofin inte ska uppställa teorier i form av hypoteser. Den ska inte förklara eller bevisa något. Den ska söka sammanställa det redan välkända och självklara, men förbisedda, så att man inte längre har vidare anledning att filosofera. På så sätt är filosofin terapeutisk och kan jämföras med en lyckad behandling av en sjukdom (se [1] sid. 582) – det filosofiska problemet försvinner helt.

En brasklapp här är att Wittgenstein tycks se starka begränsningar i möjligheten att filosofera med vardagsspråk just i matematik. Han menar att i matematik är *”allt algoritm och inget är mening”*, och *”vi kan inte beskriva matematik, vi kan bara göra den”*. Matematiken är *”ett maskineri som inte beskriver någonting, och dess symboler är som kulramens kulor”* [5]. Ja, nog är det mindre näraliggande att med vardagsspråk ladda matematik med mening, än andra ämnen. Matematikens begrepp erbjuder nog en större fantasimässig utmaning för att finna träffande bilder och formuleringar med poetisk kraft, och då en rymligare verkstad. Nedanstående förslag angående derivata är ett besök och försök i metaforverkstaden.

Regler kontra reglers användning

Matematiska regler är mycket tydliga. Wittgenstein är känd för sin poäng att det inte på något regelmässigt sätt går att tala om hur en regel ska användas. En sådan regel ger en ny fråga om hur den ska användas. Det är och förblir otydlig kunskap. Men utan sådan kunskap är reglerna, givetvis, oanvändbara.

Låt oss vara mer konkreta. Antag att uppgiften är att förenkla de följande tre uttrycken:

1) $$\frac{\frac{2y}{z}+x}{\frac{z}{2y}-x}$$

2) $\dfrac{4x^2y - y^3}{2x + y}$

3) $\dfrac{3^{5/2}}{4\sqrt{3} - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Det finns ett antal regler som kan användas vid dessa uppgifter. Som distributiva lagen $a(b + c) = ab + ac$, även kallad utbrytning eller att multiplicera in i parenteser,

dubbelbråkförenkling $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{ad}{bc}$

produkt av bråk $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

förlängning/förkortning $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$

konjugeringsregeln $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

samt potenslagar som $\sqrt{a} = a^{1/2}$, $a^{-b} = 1/a$

och $a^{b+c} = a^b a^c$.

Man vilken ska vi använda först? I vilken ordning? När är uttrycket som mest förenklat? Hur avgör vi det? Finns det någon regel för det? Nej, knappast. Pröva med 1), 2), 3) ovan. Kan du förklara *varför* du gör vad du gör? Detta är matematikkultur, som är svår att definiera entydigt. Men ändå avgörande för att åstadkomma meningsfulla resultat. Böckerna antyder ofta inte existensen av denna kunskap. En elev anar inte att något fattas, utan tolkar lätt detta som sin egen otillräcklighet.

Derivata med vardagsspråk

Definition

I [2] nämns följande läroboksbeskrivning av derivata som typisk:

> Det gränsvärde som differenskvoten
>
> $$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
>
> närmar sig då h går mot 0 kallas derivatan av funktionen $y = f(x)$ i punkten $x = a$ och kan tecknas och utläses ”f prim a”, dvs
>
> $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Denna beskrivning är fullt tillräcklig om man redan kan derivata och känner till hur matematiska symboler fungerar. Vi får väl dock anta att eleverna inte är erfarna matematiker.

Vardaglig betydelse – lutning

Derivata kan tolkas som lutning. Till exempel lutningen hos en backe. Om man går uppför en backe så känner man lutningen i form av svett eller andfåddhet. Ju mer den lutar (och det är uppförsbacke), ju svårare. Men hur ska vi mäta *hur mycket* den lutar?

Kanske i svett? Men då beror det på *vem* som går, eftersom olika personer är olika vältränade. Hur mycket backen lutar borde ju inte bero på vem som går i den.

Men om vi kan mäta höjden över havet, så kan vi ta förslagsvis tio steg och se höjdskillnaden. Säg att vi är 3 meter högre över havet efter de tio stegen. Då är backen brantare än om vi vore 2 meter högre i alla fall. Så vi kan i alla fall använda en sådan mätning till att avgöra vilken backe som är brantast.

Går vi tio steg till och backen fortsätter på samma sätt, så kommer vi ytterligare 3 meter högre, totalt 6 meter högre efter tjugo steg. Men backens lutning borde vara oberoende av hur många steg vi går också (den borde vara oberoende av hur vi går överhuvudtaget). Om vi dividerar höjdskillnaden med antalet steg så får vi efter tio steg 3/10 och efter tjugo steg 6/20, som är samma sak! Båda är 0,3 eller 3/10.

Detta är nästan precis definitionen på derivata, faktiskt. Som vi strax ska se. Fast vi förklär den i andra bokstäver.

Problemet är nu bara ”steg”. Det beror ju igen på vem som går, på hur långa steg. Dessutom ska vi helst mäta förflyttningen helt vågrätt. Antag att vi rör oss 10 eller 20 meter rakt åt sidan istället, och då kommer 3 eller 6 meter högre upp. Det betyder att vi rör oss in i berget, så vi får väl nöja oss med att tänka oss det. Då är lutningen 0,33. Detta är precis derivata! Det blir nu samma sak vem som än mäter. Om man går från samma punkt, och i samma riktning är det backens lutning, oberoende av mätaren.

Om vi kommer 3 meter lägre då? Om det är en nedförsbacke? Jo då säger vi att lutningen är negativ, den är – 0,33. Om den är negativ lutar det nedåt i stället. Mer om det strax.

Figurer och formlers mekanism

Det vi gjorde är precis derivata, för vi kan göra samma resonemang i en graf till en funktion $f(x)$. Antag att vi börjar i en punkt a på x-axeln. Just här är grafens höjd $f(a)$. Det är ju så en graf fungerar. Funktionens värde är just avståndet till x-axeln. Är värdet negativt är punkten söder om x-axeln i stället.

Antag att vi rör oss 0,21 åt höger från a. Då hamnar vi i punkten $a + 0{,}21$. Här har vi värdet $f(a + 0{,}21)$ (för det är så funktioner fungerar!). Hur mycket har värdet ändrats? Jo från $f(a)$ till $f(a + 0{,}21)$. Skillnaden är $f(a + 0{,}21) - f(a)$. Detta är höjdändringen. Om vi går h åt höger, i stället för att gå just 0,21, så har vi höjdskillnaden $f(a + h) - f(a)$.

Men vi skulle ju dela med hur mycket vi rörde oss i sidled. Ja vi rörde oss ju 0,21, från a till $a + 0{,}21$, så vi får

$$\frac{f(a+0{,}21)-f(a)}{0{,}21} .$$

Eller, om vi inte låser oss till just 0,21, utan h, som kan vara lite vadsomhelst:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} .$$

Men vad händer om lutningen ändrar sig mycket nära a? Säg att den blir helt annorlunda bara 0,05 från a? Säg att funktionen sticker iväg, och blir mycket stor. Då måste $f(a+0{,}21)$ vara stort, även om $f(x)$ fortfarande är samma från $a-0{,}04$ (0,04 till vänster om a) till $a+0{,}04$ (0,04 till höger om a).

Så som vi räknat hittills kommer då det stora $f(a + 0{,}21)$ att påverka beräkningen av lutningen i a.

Men ett annorlunda utseende en bit ifrån borde inte påverka lutningen just i a! För att få lutningen i a, och inte någon annanstans, låter man h bli mindre och mindre, så liten som möjligt. Då kommer den annorlunda lutningen i 0,05 inte att påverka värdet på lutningen i a, så fort h är mindre än 0,05.

Så man låter h gå mot noll. Då får vi lutningen i punkten a, utan störningar från eventuella oroliga grannar. Vi har därför lutningen

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} .$$

i punkten a. Med "lim", som uttalas "limes", talar man om att vi ska ha det värde som man får om man låter h närma sig noll hur mycket som helst ($h \to 0$). 1725 började Newton använda detta ord, "limes", för gränsvärden. Ordet är latin, och betyder gräns mellan länder.

Blir nu uttrycket som står här ovan verkligen något vettigt värde när vi låter $h \to 0$? För en del funktioner blir det faktiskt inte det, men sådana problem struntar vi i nu. En sak i taget.

Typiskt exempel: rät linje

En rät linje har samma lutning överallt. Om vi skriver den som $y = kx + l$, så är k riktningskoefficienten, som betyder lutningen. Då ska dess derivata vara k. Låt oss kontrollera!

Om grafen är den räta linjen $y = kx + l$ så är $kx + l$ grafen till $f(x)$ som vi talat om ovan. Så att $f(x) = kx + l$. Så

$$f(a) = ka + l, \text{ och}$$

$$f(a + h) = k(a + h) + l.$$

Alltså,

$f(a + h) - f(a) = k(a + h) + l - (ka + l) =$ {förenkling, både ka och l försvinner!} $= kh$.

Sätter vi in att $f(a + h) - f(a)$ helt enkelt blev kh, så får vi

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{kh}{h} = k$$

genom att förkorta bort h.

Så den räta linjens lutning är k, detsamma som riktningskoefficienten. Det är samma lutning i alla punkter a, eftersom detta uttryck (endast "k") som representerar lutningen i a inte beror på a. Det förekommer ju inget a någonstans i uttrycket, så även om a varierar så ändrar sig inte uttryckets värde!

Oberoende av startpunkt – differens!

Något som är bra med *differenser* är att man kan titta på hur ett värde ($f(a + h)$) förändras *oberoende av var man började* (i $x = a$). Drag bara ifrån startvärdet (gör $- f(a)$). Så kvoten

$$\frac{\text{Skillnad i } y\text{-värden}}{\text{Skillnad i } x\text{-värden}}$$

som talar om hur mycket som händer med y-värdena om x-värdena ändras är, på matematiskt språk, kvoten

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Kvoten kallas ibland ”differenskvot”. Det är ju en differens (mellan $f(a+h)$ och $f(a)$), och dessutom en kvot (med h). Sedan måste vi låta h gå mot noll så vi får lutningen just i a, oberoende av vad grafen gör för andra svängar i närheten av a.

Derivata: skrivsätt, generell mening

Kalkylen ger oss lutningen i varenda punkt! Helt automatiskt, om vi räknar för allmänt a. Låt oss kalla lutningen för $f(x)$ i $x = a$ för $f'(a)$. Eller, varför inte, $f'(x)$ helt enkelt! Ursäkta för bytet av beteckning mellan x och a hela tiden. Men a brukar användas för en speciell punkt, den vi studerar lutningen i, medan x är vilken punkt som helst.

Egentligen spelar det ju ingen roll vilken bokstav vi använder – ovan försökte jag markera olika roller för talen genom att använda olika bokstäver. Men jag sa inget om det, det erkänns!

Vi har alltså två funktioner. Funktionen $f(x)$ talar om grafens höjd i varje punkt x. Funktionen $f'(x)$ talar om lutningen för grafen, i samma punkt, x. Så lutningen i $x = 2$, till exempel, betecknar vi med $f'(2)$. Vi kan inte räkna ut lutningen i denna punkt förrän vi vet vilken funktion $f(x)$ vi har att göra med. Men vi kan ändå skriva upp $f'(2)$, räkna med denna symbol ($f'(2)$) och veta vad vi talar om. Sådan är matematiken.

Formelräkningen – en annorlunda historia

Det vi har sagt betyder att man kan beräkna derivata genom att bara sätta in i

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

och sedan försöka låta $h \to 0$. Men när man räknar med formlerna så dyker nya problem upp, som är formelmässiga, och kräver helt andra sätt att tänka. Det formelmässig motsvarar förstås idéerna och lutning som vi talat om tidigare, men bara på ett indirekt sätt.

Låt oss beräkna lutningen för en parabel, för $f(x) = x^2$. För formeln ovan behöver vi då

$f(a) = a^2$, och
$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$.

Vi sätter in och hoppas det går att förenkla på något sätt. *Hur* vi kan förenkla, eller *om* det går, vet vi ju sällan i förväg. Sådan är matematiken. Vi får då:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

Sätter vi in $h = 0$ här får vi

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{(a+0)^2-a^2}{0} = \frac{a^2-a^2}{0},$$

hjälp, noll genom noll, absolut otillåtet! Det gick inte. Så vi måste förenkla, om det går, innan vi sätter in $h = 0$. Man kan utveckla kvadraten, kanske...

$$\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \{\, a^2 \text{ försvinner!}\} =$$

$$\frac{2ah+h^2}{h} = \{\text{nu kan ju ett } h \text{ förkortas}\}$$

$$= 2a + h.$$

Nu, efter att vi förkortat ett h, är det plötsligt inga problem alls med att sätta in $h = 0$, det ger bara addition med 0 (detta är verkligen magin med matematiska kalkyler!). Det ger ju $2a + 0$, alltså $2a$ bara, som är derivatan av $f(x) = x^2$ i $x = a$. Inte längre noll genom noll, utan något vettigt.

Alltså: $f'(x) = 2x$ (med ett blixtsnabbt byte av a mot x!). Kalkylen lyckades denna gång (därför står den i böckerna). Detta betyder exempelvis att $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$. Mycket riktigt har vi vågrät lutning i $x = 0$. Varken uppförs- eller nedförsbacke. Detta är ju lägsta punkten för $f(x) = x^2$. Det verkar stämma.

Men tyvärr, du är nästan lurad. För kalkylen med differenskvoten som vi just gjorde är nästan onödig. Kalkyler där differenskvoten verkligen beräknas gör man inte ofta. Man brukar beräkna derivator från några derivator som man känner (för *dem* behövs differenskvoten!) tillsammans med deriveringsregler. Reglerna gör att man återför derivatorna på de redan kända. Det är ett lättare sätt. Det är grundmetoden i många matematiska sammanhang. Man bygger upp några verktyg, sen använder man *dem* hela tiden.

Vad som är *lätt eller svårt* att räkna ut spelar ju en mycket stor roll, på alla matematiska nivåer, men nämns högst i förbigående. Vad som menas med ”lätt” är inte heller lätt att beskriva tydligt – inte på något matematiskt exakt sätt. Fast det är så viktigt. Sådan är matematiken!

Derivata och tangent är kusiner

Tangenten är viktig för derivatan. Det är den räta linje som *går genom punkten* och *har samma lutning som kurvan*, i just denna punkt, förstås. Betrakta en linje vilken som helst som går genom punkten. Hur mycket avviker den från kurvan, om vi är nära punkten? Jo, *proportionellt* mot hur långt från punkten vi är, typiskt ($\sim h$). Har vi en tangent minskar denna avvikelsen *snabbare* än proportionellt ($\sim h\varepsilon(h)$, där $\varepsilon(h) \to 0$). (Ty $|(f(a+h)-f(a))/h - A| = \varepsilon(h) \to 0$ är samma sak som $|(f(a+h)-(Ah-f(a))| = h\varepsilon(h)$ om h är positivt, och $Ah - f(a)$ är tangenten skriven på lite konstigt sätt ($h = x - x_0$).)

Detta är exklusivt för tangenten – det gäller endast för en tangent. Att det finns en sådan rät linje (som vi kallar tangent) är ekvivalent med *deriverbarhet* i punkten. Alltså med att gränsvärdet av differenskvoten existerar. Alltså att det *finns en* (enda, väldefinierad) lutning i punkten. Existensen av en tangent är en geometrisk formulering av deriverbarhet.

Om vi tar fram mikroskopet och förstorar tillräckligt mycket runt punkten, så kommer kurvan till slut att se ut som en rät linje. Det är deriverbarhet i ytterligare en geometrisk formulering. Och den räta linje man då ser är, förstås, tangenten. (I spetsen av $f(x) = |x|$ finns det ingen tangent. Och kurvan ser ut som ett ”v” hur mycket vi än förstorar. Ej deriverbar, i spetsen $x = 0$.)

Former: monolog – dialog, muntligt – skriftligt, direkt – indirekt

Den ovanstående beskrivningen av derivata har ganska mycket vardagsspråk som stönanden, uppdykande känslointryck och vedermödor. Detta antyder matematikverksamheten, och erbjuder därför identifikation.

Kanske argumentationen skulle fungera bättre skriven som dialog mellan personer, och inte som en monolog. Den kanske också fungerar bättre muntligt än skriftligt för många elever. Dessutom är texten ovan inte direkt påverkad av verkliga elevers faktiska funderingar, endast indirekt via mina undervisningserfarenheter.

Elever som konstruerar mening

Matematikkartor

Artikeln *Klass 9A:s matematikkarta* [3] beskriver en möjlighet för elever att ta sig friheter att själva formulera matematikens sammanhang. De åtta i klass 9A tog detta tillfälle från första stund. En effekt detta fick på deras matematikuppfattning är att de själva blev varse att de kan ganska mycket matematik. Artikeln innehåller elevers verbaliseringar av matematiska samband och mening med matematik.

Boken *Envariabelanalys med dialoger* [4] (se www.bth.se/analysmeddialoger) innehåller en matematikkarta och studentdialoger om en universitetskurs i matematisk analys. Dialogerna förs till stor del i vardagsspråk, och är separerade från den normala framställningen.

Den äkta och öppna dialogens konst

Jag menar att matematiken kan finna nytt liv, emotionellt liksom kunskapsmässigt, när elever och lärare i ett klassrum känner att de själva har rätt att formulera vad matematik är, och söka i de filosofiska frågor som normalt dyker upp under matematikverksamhet. Människor, små och stora, behöver mening med sin verksamhet. Och mening som upplevelse lika mycket som sanning.

REFERENSER

[1] *Vår tids filosofi – en uppslagsbok*, Forum, 1982.

[2] Marie Tängdén, Sara Wallner, *Elever skriver om matematik*, Nämnaren Nr 4,2003.

[3] Mia Selander, Håkan Lennerstad, *Klass 9A:s matematikkarta*, Nämnaren Nr 1,2004.

[4] Håkan Lennerstad, *Envariabelanalys med dialoger*, Förlaget Kärret, 2002.

[5] Mathieu Marion, Wittgenstein, *Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, 1998.